

Dekomposition von Mehrprodukt-Warteschlangennetzwerken mit „Batch-Processing“

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von
Dipl. Wirt.-Inf. Wiebke Klünder
aus Potsdam

genehmigt von der
Fakultät für Mathematik/Informatik und Maschinenbau
Technische Universität Clausthal

Tag der mündlichen Prüfung
16.11.2018 15:00 Uhr

Diese Arbeit wurde am Simulationswissenschaftlichem Zentrum Clausthal-Göttingen am Standort Technische Universität Clausthal angefertigt.

Vorsitzende/Vorsitzender der Prüfungskommission:
Prof. Dr. Olaf Ippisch

Hauptberichterstatte: Prof. Dr. Thomas Hanschke
Berichterstatte: Prof. Dr. Dietmar P. F. Möller
Berichterstatte: Prof. Dr. Horst Zisgen

Für apl. Prof. Dr. habil. Johannes Brasche.
Freund, Wegbegleiter, Mentor und Kollege, der viel zu früh von uns
gegangen ist.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Einführung in die Warteschlangentheorie	3
2.1	Komponenten eines Warteschlangensystems	4
2.2	Kendall-Notation [1953]	7
2.3	Leistungsgrößen eines Warteschlangensystems	8
2.4	Satz von Little [1961]	12
3	Approximative Verfahren für Nicht-Markovsche Warteschlangensysteme mit Batch Service	13
3.1	Das $G/G/c$ – Warteschlangensystem im Ein-Produktfall . . .	13
3.1.1	Modellbeschreibung	13
3.1.2	Diffusionsapproximation	14
3.1.3	Approximationsformel von Allen und Cunneen	22
3.2	Das $G^X/G^{(b,b)}/c$ -Warteschlangensystem im Ein-Produktfall . .	29
3.2.1	Modellbeschreibung	29
3.2.2	Diffusionsapproximation [1999]	30
3.2.3	Approximationsformel von Allen und Cunneen [2006] .	36
3.3	Das $G^X/G^{(b,b)}/c$ -Warteschlangensystem im Mehr-Produktfall .	49
3.3.1	Modellbeschreibung	49
3.3.2	Approximationsformel von Allen und Cunneen [2007] .	50
4	Dekomposition von offenen Warteschlangennetzen ohne Produktformlösung	61
4.1	Dekompositionsmethode	61
4.2	Offene Warteschlangennetze ohne Batch Service	61
4.3	Offene Warteschlangennetze mit Batch Service im Ein-Produktfall	63
4.4	Offene Warteschlangennetze mit Batch Service im Mehr-Produktfall	65
4.4.1	Beispiel	73
5	Evaluierung	77
5.1	Formulierung und Spezifikation der Simulationsmodelle	77
5.2	Simulation von offenen Warteschlangennetzen	78
5.3	Statistische Methode der regenerativen stochastischen Prozesse	80
5.4	Analyse und Überprüfung der Simulations- und Approximationsergebnisse	83

5.4.1	Zusammenfassung der Simulations- und Approximati- onsergebnisse	83
5.4.2	Seriensystem	84
5.4.3	Netz	99
6	Fazit	118
7	Quellen	121

1 Einleitung

Warteschlangennetze bilden ein geeignetes Instrument zur Leistungsanalyse von Computer-, Kommunikations-, Verkehrs- und Produktionssystemen und Supply-Chains. Mit Hilfe von Warteschlangennetzen ist es möglich, den optimalen Betriebspunkt bezüglich Durchsatz, Warteplatz- und Maschinenkapazitäten zu ermitteln.

Leistungsgrößen von Warteschlangennetzen können quantitativ durch die Monte-Carlo Simulation bestimmt werden. Die Simulationstechnik ermöglicht eine hohe Wirklichkeitstreue der zu modellierenden Warteschlangennetze. Jedoch sind funktionale Zusammenhänge zwischen Leistungsgrößen und Parametern schwer erkennbar und die Optimierung ist umständlich in der Durchführung. Die analytisch orientierte Methode der Warteschlangentheorie bietet eine Alternative und kann häufig mit minimalem Aufwand durchgeführt werden. Zudem sind die Beziehungen zwischen Modellparametern und Leistungsgrößen leicht interpretierbar.

Im Fokus des wissenschaftlichen Interesses dieser Arbeit stehen die analytischen Verfahren der Warteschlangentheorie. Anfang des 20. Jahrhunderts hatte sich der dänische Mathematiker und Ingenieur Agner Krarup Erlang mit Fragen zum Telefonverkehr beschäftigt. Standen anfänglich wegen ihrer einfachen Struktur Markovsche Warteschlangensysteme im Vordergrund, wurden später allgemeinere Warteschlangensysteme gelöst. Allerdings zeigte sich schon früh, dass es schwierig ist, Warteschlangensysteme unter allgemeinen Bedingungen exakt zu lösen. Dies gilt um so mehr für Warteschlangennetze. Mit dem Aufkommen der Computernetze Anfang der 70ziger Jahre entstand der Bereich der approximativen Behandlung von Warteschlangennetzen. Die Ansätze versuchen, Warteschlangennetze unter Berücksichtigung von Grenzwertsätzen und der Theorie der Erneuerungsprozesse auf einfachere Strukturen zurückzuführen. Die Dekompositionsmethode stellt eine bedeutende Lösungsstrategie dar, die von Kühn [Kue79], Chandy/Herzog/Woo [CHW75] und Whitt [Whi83] eingeführt wurde. Parameter der Warteschlangennetze werden durch Freischneiden der Komponenten zerlegt und die Leistungsgrößen anschließend durch Komposition ermittelt.

Auch wenn die Annahmen interagierender stochastisch unabhängiger Erneuerungsprozesse als Eingangs- und Abgangsströme verletzt wird, insbesondere wenn Warteschlangennetze mit Batch Service untersucht werden und die mittlere Eingangsgruppengröße die Batchgröße übersteigt, erhält man Resultate, die im Vergleich zur Simulation die Tendenzen der Leistungsgrößen von Warteschlangensystemen gut nachzeichnen. Dies ist selbst dann gegeben, wenn die Werte in extremen Situationen, zum Beispiel erhöhte Variati-

onskoeffizienten, Kaskaden oder geringe Auslastungen, stärker voneinander abweichen. Die Dekompositionsmethode kann als Prä-Evaluierungswerkzeug eingesetzt werden, welche eine Vorabbewertung von Modellen ermöglicht, die anschließend mit Hilfe ereignisorientierter Simulation angepasst und erweitert werden können.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: Zunächst werden einfache Mehrbedienersysteme mit und ohne Batch Service beschrieben und die damit zusammenhängenden Phänomene erläutert. Im vierten Kapitel werden Warteschlangennetze eingeführt und die Dekompositionsmethoden von Pujolle/Ai[PA86] beziehungsweise Whitt[Whi83] und Hanschke/Zisgen[HZ11] beschrieben. Abgeschlossen wird das vierte Kapitel von der Weiterentwicklung der Dekompositionsmethode für Warteschlangennetze mit Batch Service im Mehr-Produktfall. Im letzten Kapitel wird der neue Ansatz mittels Simulationsverfahren evaluiert.

2 Einführung in die Warteschlangentheorie

Die Warteschlangentheorie beschäftigt sich mit der mathematischen Modellierung von Warteschlangensystemen. Der Modellierung ist ein einfaches Grundmodell zugrunde gelegt.

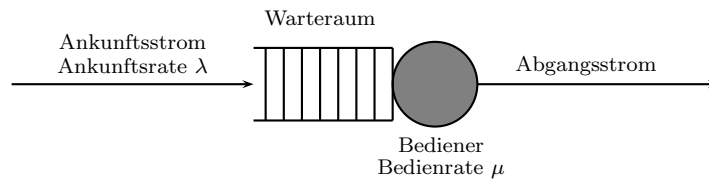


Abbildung 2.1: Grundmodell eines Warteschlangensystems

Das Grundmodell setzt sich aus einem Warteraum und einer oder mehreren Bedienstationen zusammen. Aufträge, die durch die Bediener bearbeitet werden sollen, treten zu zufälligen Zeitpunkten in das System ein und können Personen, materielle Güter, zum Beispiel Bauteile und Baugruppen, oder immaterielle Güter, zum Beispiel Computerprogramme oder Tasks, repräsentieren. Das zufällige Eintreten von Aufträgen bildet den Ankunftsstrom. Ist nach dem Eintreten eines Auftrags mindestens ein Bediener inaktiv, so wird der Auftrag umgehend bedient. Andernfalls reiht sich der Auftrag in die Warteschlange ein, sofern dies die Warteraumkapazität des Systems zulässt. Sonst wird der Auftrag abgewiesen. Ein bearbeiteter Auftrag verlässt das Warteschlangensystem unmittelbar. Das Austreten von Aufträgen aus dem System bildet den Abgangsstrom.

In diesem Kapitel werden zunächst die Komponenten von Warteschlangensystemen beschrieben, wie sie in dieser Arbeit verwendet werden. Über die Eigenschaften beziehungsweise die Parametrisierungen der Komponenten lässt sich eine große Anzahl von Konfigurationen von Warteschlangensystemen konstruieren, die in der Realität existieren. Anschließend wird auf die formale Notation von Warteschlangensystemen, die von Kendall eingeführt wurde, eingegangen. Im Anschluss werden die Leistungsgrößen, auch Kennzahlen genannt, von Warteschlangensystemen im Gleichgewichtszustand erläutert und in diesem Zusammenhang der Satz von Little [Lit61] vorgestellt. Als einführende Literatur bieten sich beispielsweise [GH98], [BGMT06], [Kle75], [All78], [GP98] und [Gau12] an.

2.1 Komponenten eines Warteschlangensystems

Die Eigenschaften eines Warteschlangensystems lassen sich im Allgemeinen über die fünf Komponenten Quelle, Ankunftsstrom, Warteschlange, Bediener und Abgangsstrom modellieren ([GH98, S. 3 ff.], [All78, S. 154 ff.]).

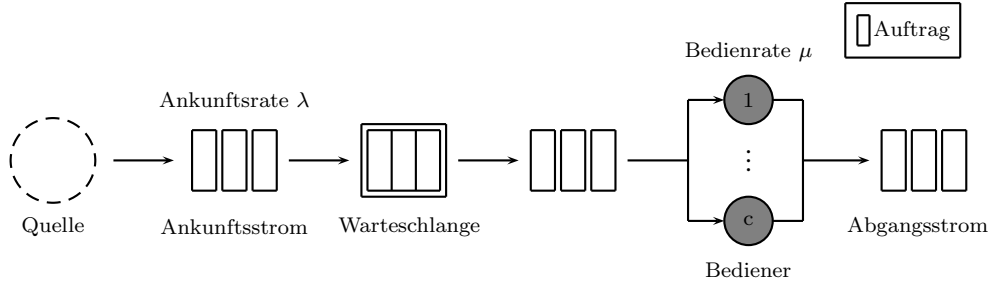


Abbildung 2.2: Grundmodell der Warteschlangentheorie/Komponentendarstellung

Quelle

Die Quelle beschreibt die Menge von Aufträgen, die in das Warteschlangensystem eintreten können. Es wird zwischen endlichen und unendlichen Quellen unterschieden. Eine endliche Quelle beeinflusst das Warteschlangensystem dahingehend, dass die Anzahl der Aufträge, die über die Quelle in das Warteschlangensystem eintreten, begrenzt ist, was folglich die Laufzeit limitiert. Unbegrenzt viele Aufträge werden durch eine unendliche Quelle bereitgestellt.

Ankunftsstrom

Die Eigenschaften des Eintretens von Aufträgen in das Warteschlangensystem werden über den Ankunftsstrom ausgedrückt. Definiert wird dieser Ankunftsstrom über eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Ankunftszeitpunkte. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bildet eine Erneuerungsfolge. Aus den Ankunftszeitpunkten ergeben sich Zwischenankunftszeiten (*interarrival times*), die durch eine i. i. d. Folge $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ charakterisiert werden. Die Zwischenankunftszeit I_n beschreibt die Zeitspanne, die zwischen der Ankunftszeit A_{n-1} des $(n-1)$ -ten und der Ankunftszeit A_n des n -ten Auftrags vergeht. Es gilt $A_0 := 0$. Abbildung 2.3 stellt exemplarisch den zeitlichen Verlauf der Ankünfte von Aufträgen dar.

Für den Erwartungswert $E[I]$ der i. i. d. Folge $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird die Annahme $0 < E[I] < \infty$ getroffen. Die Ankunftsrate λ ergibt sich aus dem Kehrwert

des Erwartungswertes $E[I]$,

$$\lambda = \frac{1}{E[I]},$$

und beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Zeitintervall im Mittel eine bestimmte Anzahl von Aufträgen in das Warteschlangensystem gelangt. Bezeichne N_t^A die Anzahl der bis zum Zeitpunkt t erfolgten Ankünfte und bilde den zugehörigen Erneuerungsprozess der Erneuerungsfolge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Die Ankunftsrate λ lässt sich auch durch

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t^A}{t}$$

charakterisieren.

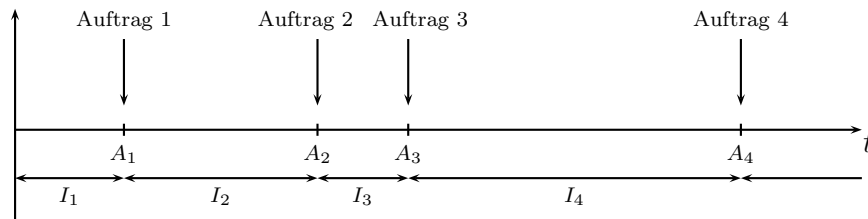


Abbildung 2.3: Zusammenhang Ankunftszeitpunkte und Zwischenankunftszeiten

Warteschlange

Die Komponente Warteschlange hat den Zweck zu erfüllen, Aufträge aufzunehmen, die in das System eintreten und nicht sofort bedient werden können, da die Bediener aktiv sind. Die Parametrisierung der Komponente wird über die Wahl der Größe der Kapazität des Warteraums umgesetzt. Der Warteraum kann beschränkt oder unbeschränkt sein. Ist der Warteraum beschränkt, verfügt dieser über eine gegebene Anzahl von Plätzen. Sind alle Plätze besetzt, müssen Aufträge abgewiesen werden. Verfügt ein Warteraum über eine unbegrenzte Kapazität, ist eine Abweisung von Aufträgen nicht möglich.

Bedienstation

Die Bedienstation besteht aus $c \in \mathbb{N}$ parallel und identisch arbeitenden Bedienern. Von einem Einbedienersystem wird gesprochen, wenn $c = 1$, und von einem Mehrbedienersystem, wenn $c > 1$ ist.

Zusätzlich zu dieser Modellierungsmöglichkeit kann die Reihenfolge, in der die Aufträge bearbeitet werden sollen, festgelegt werden. Zu den gängigsten Warteschlangendisziplinen gehören *FCFS/FIFO*, *LCFS/LIFO*, *SIRO/RSS*, *RR*, *PS*, *IS*, *PR* und *GD* (siehe Tabelle 2.1).

Bedienregel	Erläuterung
<i>FCFS/FIFO</i>	(First-Come-First-Served/First-In-First-Out) Aufträge werden nach ihrer Ankunftsreihenfolge bedient.
<i>LCFS/LIFO</i>	(Last-Come-First-Served/Last-In-First-Out) Der jeweils letzte Auftrag, der sich in die Warteschlange einreicht, wird zuerst bedient.
<i>SIRO/RSS</i>	(Service-In-Random-Order/Random-Selection-for-Service) Der zu bedienende Auftrag wird zufällig aus der Warteschlange ausgewählt.
<i>RR</i>	(Round Robin) Ein Auftrag kann einen Bediener nur für ein vorgegebenes Zeitintervall in Anspruch nehmen. Reicht die gegebene Zeit nicht aus, um den Auftrag vollständig zu bearbeiten, geht dieser zurück in die Warteschlange und wartet bis er nach dem <i>FCFS</i> -Prinzip wieder bedient wird. Dieser Vorgang wiederholt sich für die jeweiligen Aufträge solange, bis diese vollständig bedient wurden und das Warteschlangensystem verlassen.
<i>PS</i>	(Processor Sharing) Das Prinzip dieser Bedienregel ist gleich dem von <i>RR</i> . Jedoch werden die vorgegebenen Zeitintervalle derart klein gewählt, dass es wirkt als würden alle Aufträge in der Warteschlange durch den Bediener gleichzeitig bearbeitet werden.
<i>IS</i>	(Infinity Server) Die Anzahl der Bediener ist ausreichend groß, so dass sich keine Warteschlange bilden kann.
<i>PR</i>	(Priority) <u>Statistic Priority:</u> Die Auswahl der Aufträge erfolgt über eine vorgegebene Priorität. Haben mehrere Aufträge die gleiche Priorität, dann werden diese nach dem <i>FCFS</i> -Prinzip bedient. <u>Dynamic Priority:</u> Die Wahl des Auftrags, der als nächster bedient werden soll, hängt von einer dynamischen Priorität ab, welche sich im Laufe der Zeit ändert. <u>Preemption/Preemptive-Priority:</u> Wenn Prioritäten oder die <i>LCFS</i> -Regel genutzt werden, wird die Bedienung eines Auftrags unterbrochen, sobald ein Auftrag eine höhere Priorität besitzt beziehungsweise ein Auftrag mit einer höheren neu in das System eintritt. <u>Non-Preemptive-Priority:</u> Eine laufende Bedienung eines Auftrags im Warteschlangensystem mit der <i>LCFS</i> -Regel oder Prioritätenvorgabe wird nicht unterbrochen, wenn ein Auftrag mit einer höheren Priorität sich in die Warteschlange einreicht.
<i>GD</i>	(General-Disciplin) Allgemeine nicht konkretisierbare Bedienregeln.

Tabelle 2.1: Bedienregeln

Die Bedienzeiten werden durch eine Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (*service times*) von Zufallsvariablen abgebildet, die im Rahmen dieser Arbeit als i.i.d. Folge und unabhängig vom Ankunftsstrom angenommen wird.

Analog zur mathematischen Beschreibung des Ankunftsstroms ist $E[S]$ mit

$0 < E[S] < \infty$ der Erwartungswert der Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und

$$\mu = \frac{1}{E[S]}$$

die Bedienrate, welche den Durchschnitt an Aufträgen, die pro Zeiteinheit durch das Warteschlangensystem bearbeitet werden können, angibt. Liegt ein Mehrbedienersystem vor, erhöht sich die Bedienrate um den Faktor c auf $c\mu$, falls alle Bediener belegt sind.

Abgangsstrom

Der Abgangsstrom $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschreibt die Eigenschaften des Austretens von Aufträgen aus einem Warteschlangensystem. Für die Untersuchung eines einzelnen Warteschlangensystems ist der Abgangsstrom von geringerer Bedeutung. Sind jedoch mehrere Warteschlangensysteme zu einem Netz zusammengeschlossen, so trägt der Abgangsstrom eines Warteschlangensystems zum Input eines oder mehrerer anderer Warteschlangensysteme bei.

Die Zwischenabgangszeit I_n^D beschreibt die Zeit, die zwischen dem Abgang des $(n-1)$ -ten und n -ten Auftrags vergeht. In der Regel ist die Folge $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (*departure times*) von der Folge $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abhängig und beschreibt keine Erneuerungsfolge.

2.2 Kendall-Notation [1953]

Die unterschiedlichen Parametrisierungen der Komponenten eines Warteschlangensystems liefern eine Vielzahl von Designs. Um diese kurz und prägnant darzustellen, wurde 1953 von Kendall ([BGMT06, S. 242 f.], [GH98, S. 7 f.]) eine Notation eingeführt, welche Auskunft über die jeweiligen Merkmalsausprägungen der Komponenten eines Warteschlangensystems gibt. Die Notation besitzt die Form einer durch Schrägstriche getrennten Folge von Zeichen:

$$A/B/c/m/Z.$$

A charakterisiert den Ankunftsprozess und B den Bedienprozess, was mindestens die Angabe der Verteilung der Zwischenankunftszeiten beziehungsweise der Bedienzeiten umfasst. Tabelle 2.2 listet gängige Symbole häufig vorkommender Verteilungen auf.

Die Anzahl der identischen und parallel arbeitenden Bediener wird über $c \in \mathbb{N}$ festgelegt. Wie groß der Warteraum des Warteschlangensystems ist, wird durch $m \in \mathbb{N}_0$ vorgegeben und die zugrunde gelegte Warteschlangendisziplin wird durch Z festgelegt.

Symbol	Bedeutung
M	Exponentialverteilung (Markov)
E_k	Erlang-Verteilung mit Parameter $k, k \in \mathbb{N}$
H_k	Hyperexponentialverteilung mit Parameter $k, k \in \mathbb{N}$
C_k	Cox-Verteilung mit Parameter $k, k \in \mathbb{N}$
D	Deterministische Verteilung
G	Allgemeine Verteilung (General)

Tabelle 2.2: Verteilungen

Wenn die Kapazität des Warteraums $m = \infty$ ist oder die Warteschlangendisziplin *FCFS* gewählt wurde, kann die jeweilige Komponente in der Notation auch weggelassen werden. Demnach beschreibt die Notation $G/M/8$ ein Warteschlangensystem mit allgemein verteilten Zwischenankunftszeiten, exponentiell verteilten Bedienzeiten, acht identischen und parallel arbeitenden Bedienern mit einem vorgeschaltetem unbeschränkten Warteraum und der Bedienreihenfolge nach dem *FCFS*-Prinzip.

2.3 Leistungsgrößen eines Warteschlangensystems

Leistungsgrößen beziehungsweise Kenngrößen dienen der Leistungsbewertung von Warteschlangensystemen und verweisen auf mögliche Schwachstellen ([GH98, S. 9 f.], [BGMT06, S. 244 f.]). Im Fokus stehen die Auslastung, die mittlere Wartezeit, die mittlere Verweilzeit, die mittlere Warteschlangenlänge und die mittlere Anzahl Aufträge im System. In dieser Arbeit werden ausschließlich stationäre Warteschlangensysteme untersucht. Die folgenden Beschreibungen der Leistungsgrößen beziehen sich deshalb auf stationäre Systeme.

Auslastung ρ

Die Auslastung beschreibt das Maß der durchschnittlichen Beschäftigung eines Warteschlangensystems. Besitzt ein Warteschlangensystem eine unendliche Quelle, berechnet sich die Auslastung ρ aus dem Verhältnis der Ankunftsrate zur Bedienrate:

$$\rho = \frac{E[S]}{E[I]} = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Für ein Mehrbedienersystem mit c Bedienern ist die totale Bedienrate durch $c \cdot \mu$ gegeben, woraus sich für die Auslastung

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$$

ergibt.

Gilt $\rho < 1$, dann besitzt das Warteschlangensystem (in der Regel) ein stationäres Verhalten und ist stabil. Interpretiert bedeutet die Gleichgewichtsbedingung, dass pro Zeiteinheit mehr Aufträge bedient werden können als in das Warteschlangensystem eintreten.

Wartezeit T_q

Die Zeit, die der n -te Auftrag in der Warteschlange verbringt, bevor dieser von einem der Bediener bearbeitet wird, wird als Wartezeit $T_{q,n}$ (*transaction - queue*) bezeichnet. Für stabile Systeme konvergiert $T_{q,n}$ für $n \rightarrow \infty$ in der Regel in Verteilung gegen die stationäre Wartezeit T_q . Dabei gilt

$$\overline{T}_q := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N T_{q,n} = E[T_q].$$

\overline{T}_q beschreibt das langfristige Mittel aller Wartezeiten und $E[T_q]$ bezeichnet die mittlere Zeit, die ein Auftrag im Mittel in der Warteschlange verbringt.

Verweilzeit T

Die Verweilzeit T (*transaction-system*) beschreibt die totale Zeit, die Aufträge im Warteschlangensystem verbringen. T_n berechnet sich aus

$$T_n = T_{q,n} + S_n,$$

wobei $T_{q,n}$ die oben beschriebene Warte- und S_n die Bedienzeit ist.

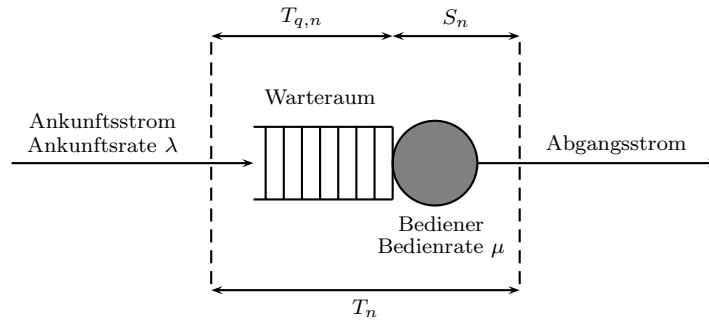


Abbildung 2.4: Anschauliche Darstellung von Verweil-, Warte- und Bedienzeit

$T_{q,n}$ konvergiert in Verteilung gegen T_q und die i.i.d. Eigenschaft der Bedienzeiten S_n implizieren, dass auch T_n in Verteilung gegen die stationäre Verweilzeit T konvergiert. Es gilt also

$$\overline{T} := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N T_n = E[T]. \quad (2.1)$$

Warteschlangenlänge N_q

Die Länge der Warteschlange N_q (*Number - queue*) in einem Warteschlangensystem legt dar, wie viele Aufträge sich zum Zeitpunkt t im Warteraum befinden. In der Regel konvergiert $N_{q,t}$ für $t \rightarrow \infty$ in Verteilung gegen die stationäre Anzahl N_q von wartenden Aufträgen. Dabei gilt

$$\overline{N_q} := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t N_{q,t} dt = E[N_q].$$

Anzahl Aufträge in einem Warteschlangensystem N

Die Anzahl von Aufträgen in einem Warteschlangensystem bezieht sich auf die totale Anzahl Aufträge, N (*Number-system*), die sich in einem Warteschlangensystem aufhalten und wird durch die Zufallsvariable N charakterisiert. Es gilt

$$N_t = N_{q,t} + N_{S,t}.$$

Die Zufallsvariable $N_{S,t}$ beschreibt die Anzahl Aufträge, die sich zum Zeitpunkt t in Bedienung befinden und $N_{q,t}$ konvergiert in Verteilung gegen N_q . Dies impliziert, dass auch N_t in Verteilung gegen die stationäre Anzahl Aufträge im System konvergiert. Es gilt

$$\overline{N} := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t N_t dt = E[N]. \quad (2.2)$$

Abbildung 2.5 stellt das Zusammenspiel von Ankünften, Abgängen, Bedienzeiten und der Anzahl Aufträge in der Warteschlange und im gesamten Warteschlangensystem in einem beispielhaften zeitlichen Verlauf dar.

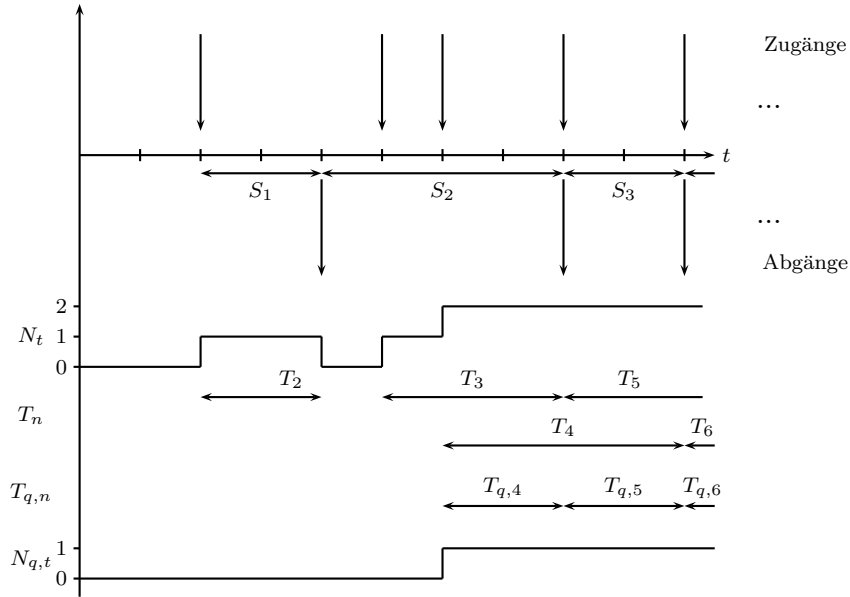


Abbildung 2.5: Einbedienersystem im zeitlichem Verlauf

Ist das Warteschlangensystem stationär, ist die Wahrscheinlichkeit p_n , dass sich n Aufträge im Warteschlangensystem befinden, gegeben durch:

$$p_n = P(N = n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Der Erwartungswert der totalen Anzahl Aufträge in einem Warteschlangensystem ergibt sich aus

$$E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n.$$

Um das erste Moment der Anzahl Aufträge im Warteraum beziehungsweise die Warteschlangenlänge zu erhalten, müssen die c Aufträge, die sich in Bedienung befinden, aus der obigen Darstellung herausgenommen werden:

$$E[N_q] = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n - c) p_n.$$

2.4 Satz von Little [1961]

Der Satz von Little [Lit61] ist einer der wichtigsten Sätze der Warteschlangentheorie. Little hat gültige Beziehungen zwischen den Leistungsgrößen stabiler Warteschlangensysteme hergestellt, mit deren Hilfe es möglich ist, mit der Kenntnis über eine Leistungsgröße und der Ankunfts- und Bedienrate alle anderen Leistungsgrößen zu berechnen. Vorteil dieser Methode ist es, dass allgemeine Gesetzmäßigkeiten a priori zwischen den Merkmalsausprägungen eines Warteschlangensystems und Leistungsgrößen bestimmt werden können. Der Satz von Little lässt sich auf alle Warteschlangensysteme mit stationären Prozessen, einschließlich $G/G/c$ -Systeme anwenden, unabhängig von der gewählten Warteschlangendisziplin.

Satz 1 (Satz von Little)

Wenn $\lambda < \infty$ und $E[T] < \infty$, dann muss auch $E[N] < \infty$ und es gilt

$$E[N] = \lambda E[T].$$

In der Literatur werden an die Behauptung des Satzes von Little unterschiedliche Voraussetzungen gestellt. Little [Lit61] hat vorausgesetzt, dass die Prozesse $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strikt stationär sind. Dann existieren die Beziehungen

$$\begin{aligned} E[N] &= \lambda E[T] \\ E[N_q] &= \lambda E[T_q]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Stidham [Sti72] nutzt die Annahme für die Behauptung $E[N] = \lambda E[T]$, dass die Grenzwerte der Ankunftsrate im Sinne von

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t^A}{t} \tag{2.4}$$

und der Wartezeit \overline{T} existieren und endlich sind. Dann existiert auch

$$\overline{N} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t N_t dt = \lambda \overline{T}.$$

Mit (2.1), (2.2) und (2.4) gilt dann

$$E[N] = \lambda E[T].$$

Analog wird für (2.3) vorgegangen.

3 Approximative Verfahren für Nicht-Markovsche Warteschlangensysteme mit Batch Service

Nicht-Markovschen Warteschlangensystemen liegen allgemeine Annahmen über die Verteilungen der Zwischenankunfts- und Bedienzeiten zugrunde. Eine Schwierigkeit von allgemeinen Warteschlangensystemen besteht darin, dass sich die Leistungsgrößen nicht exakt berechnen lassen. Zum gegenwärtigen Zeitpunkt sind keine Formeln für die stationären beziehungsweise die transienten Verteilungen der Zustandswahrscheinlichkeiten von Nicht-Markovschen Warteschlangensystemen bekannt. Eine Ausnahme bilden Netze mit Knoten, bei denen die Bedienzeit einer beliebigen Verteilung folgt, es aber unendlich viele Bediener gibt. Für solche Netze sind geschlossene analytische Lösungen für die Verteilung der Zustandswahrscheinlichkeiten bekannt.

Nicht-Markovsche Warteschlangensysteme werden seit den frühen 50er Jahren erforscht und es wurden verschiedene Ansätze entwickelt, um die Leistungsgrößen zumindest näherungsweise zu bestimmen. Hervorzuheben ist zum einen die Diffusionsapproximation ([BGMT06], [Mit97], [GH98], [Kle75]) und zum anderen der approximative Ansatz von Allen und Cunneen ([All78], [Han06], [Grö07]). Eine weitere Methode ist die Fluidapproximation, welche die rekursive Berechnung der Wartezeiten als Ansatz verwendet. Die Fluidapproximation ist jedoch nicht geeignet, wenn Nicht-Markovsche Warteschlangensysteme um Gruppenankünfte und -bedienung (Batch Service) erweitert werden ([CY01]).

Zunächst werden verschiedene Ansätze zur approximativen Leistungsanalyse von allgemeinen Nicht-Markovschen Warteschlangensystemen beschrieben. Die Übersicht umfasst die Diffusionsapproximation und die Approximationsformel von Allen und Cunneen sowie deren Erweiterung von Krämer und Langenbach-Belz. Die Beschreibung der Approximationsformel von Allen und Cunneen berücksichtigt Ergebnisse der Approximation von Martin für $M/G/c$ -Systeme und die Formel von Kingman. Anschließend werden die Diffusionsapproximation und die Formel von Allen und Cunneen auf Nicht-Markovsche Warteschlangensysteme mit Batch Service ausgedehnt, wobei auch der Mehr-Produktfall einbezogen wird.

3.1 Das $G/G/c$ – Warteschlangensystem im Ein-Produktfall

3.1.1 Modellbeschreibung

Das $G/G/c$ -Warteschlangensystem entspricht der Modellierung, welche in Abbildung 2.2 dargestellt ist. Die Zwischenankunfts- und Bedienzeiten sind

allgemein verteilt und es sind nur Erwartungswerte und Varianzen vorgegeben. Die Aufträge treten einzeln in das Warteschlangensystem ein und werden von einem der c Bediener, die identisch sind und parallel arbeiten, behandelt. Sind alle Bediener aktiv, reihen sich die Aufträge in die Warteschlange ein, die eine unbeschränkte Kapazität besitzt. Die Aufträge werden aus der Warteschlange nach dem *FCFS*-Prinzip zur Bearbeitung ausgewählt. Vollständig bediente Aufträge verlassen anschließend das Warteschlangensystem. Die Zwischenankunftszeiten werden als eine Folge $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von stochastisch unabhängigen und identisch verteilten (i. i. d.) reellen Zufallsvariablen beschrieben. Die Bedienzeiten, welche formal eine Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller i. i. d. Zufallsvariablen bilden, sind unabhängig von der Folge $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3.1.2 Diffusionsapproximation

Die Diffusionsapproximation ist ein Approximationsverfahren, welches zur Bestimmung von Leistungsgrößen stabiler Warteschlangensysteme genutzt werden kann. Einführende Literatur ist zum Beispiel in [BGMT06], [Mit97], [GH98] und [Kle75] zu finden. Die Approximationsformel, die aus der Diffusionsapproximation gewonnen wird, ist unkompliziert und leicht handhabbar. Vorausgesetzt wird der Fall einer hohen Auslastung ($\rho \rightarrow 1$). Je höher die Auslastung ist, desto konkurrenzfähiger ist die Anwendung mittels Diffusionsapproximation im Vergleich zur Monte-Carlo Simulation.

Die Grundidee der Diffusionsapproximation ist, den unbekannten Warteschlangenprozess $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ durch einen verwandten, aber vollumfänglich beschreibbaren stochastischen Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ zu approximieren (Abbildung 3.1). Hierfür bietet sich die Klasse der Diffusionsprozesse an, wie nachstehend erläutert wird.

Beschreibung des diskreten Prozesses $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$

Seien $(N_t^A)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ und $(N_t^D)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ die zugehörigen Erneuerungsprozesse der i. i. d. Folgen $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$. $(N_t^A)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ beschreibt die Anzahl Aufträge, die das Warteschlangensystem bis zum Zeitpunkt t betreten und $(N_t^D)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ die Anzahl, die das Warteschlangensystem bis zum Zeitpunkt t wieder verlassen haben.

Sei

$$N_t = N_t^A - N_t^D + n_0, \quad n_0 := N_0, \quad (3.1)$$

die Anzahl Aufträge im Warteschlangensystem zum Zeitpunkt t . Aus der Gleichung (3.1) ist ersichtlich, dass der Abgangszählprozess $(N_t^D)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ abhän-

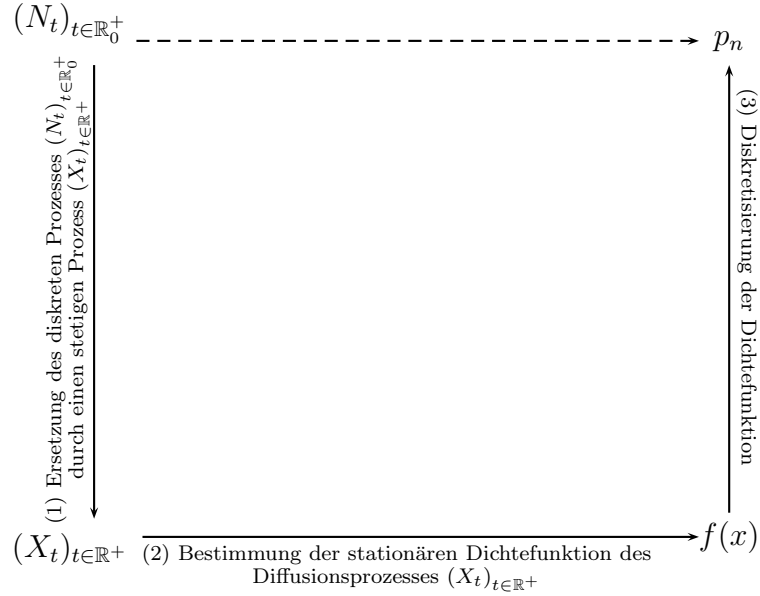


Abbildung 3.1: Grundidee der Diffusionsapproximation nach [BGMT06]

gig vom Ankunftsprozess $(N_t^A)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ ist und $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Erneuerungsfolge beziehungsweise $(N_t^D)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ keinen Erneuerungsprozess bildet. Wird die “heavy traffic” Annahme getroffen ($\rho \rightarrow 1$), dann können die Prozesse $(N_t^A)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ und $(N_t^D)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ beziehungsweise $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jedoch als stochastisch unabhängig angenommen werden. Entsprechend kann $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als Erneuerungsfolge mit dem zugehörigen Erneuerungsprozess $(N_t^D)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ aufgefasst werden. Für die Zuwächse von N_t gilt:

$$\begin{aligned}
 N_{t+\Delta t} - N_t &= (N_{t+\Delta t}^A - N_t^A) - (N_{t+\Delta t}^D - N_t^D) \\
 \Delta N_t &= \Delta N_t^A - \Delta N_t^D \\
 &\sim N_{\Delta t}^A - N_{\Delta t}^D.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Die Zuwächse ΔN_t besitzen unter den Voraussetzungen $\rho \rightarrow 1$ und $t \rightarrow \infty$ deshalb folgende Eigenschaften:

- i) Die Zuwächse $\Delta N_t = N_{t+\Delta t} - N_t$ sind für $\Delta t > 0$ unabhängig von N_t .
- ii) Die Zuwächse ΔN_t sind näherungsweise normalverteilt.

Die Eigenschaft ii) folgt aus Satz 2, der besagt, dass die Prozesse $(N_t^A)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ und $(N_t^D)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ ebenfalls asymptotisch normalverteilt sind. Die mit dem Prozess $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ assoziierten Maßzahlen $E[\Delta N_t]$ und $Var[\Delta N_t]$ können ebenfalls mit Hilfe des nachfolgenden Satzes 2 bestimmt werden.

Satz 2 (Asymptotisches Verhalten von Erneuerungsprozessen)

Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Erneuerungsfolge mit $E[X_1] < \infty$, $\text{Var}[X_1] := \sigma^2 < \infty$.

Dann gilt für den zugehörigen Erneuerungsprozess $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$

$$Z_t \stackrel{d}{=} \mathcal{N}\left(\frac{t}{E[X_1]}, \frac{t\sigma^2}{E[X_1]^3}\right) \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Die i. i. d. Folgen $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzen den Erwartungswerte $E[I] = 1/\lambda$ und $E[S] = 1/\mu$. Für $t \rightarrow \infty$ ergeben sich die Maßzahlen der Erneuerungsprozesse $(N_t^A)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ und $(N_t^D)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ unmittelbar aus Satz 2:

$$\begin{aligned} E[N_t^A] &= \frac{t}{E[I]} = \lambda t, \\ \text{Var}[N_t^A] &= \frac{\text{Var}[I]}{E[I]^3} t = \frac{1}{E[I]} \cdot \frac{\text{Var}[I]}{E[I]^2} t = \lambda \text{SCV}[I] t, \\ E[N_t^D] &= \frac{t}{E[S]} = \mu t, \\ \text{Var}[N_t^D] &= \frac{\text{Var}[S]}{E[S]^3} t = \frac{1}{E[S]} \cdot \frac{\text{Var}[S]}{E[S]^2} t = \mu \text{SCV}[S] t, \end{aligned}$$

wobei mit $\text{SCV}[\cdot]$ der quadrierte Variationskoeffizient einer Zufallsgröße bezeichnet wird: $\text{SCV}[\cdot] = \text{Var}[\cdot] / E[\cdot]^2$.

Aus (3.2) ergibt sich

$$\begin{aligned} E[\Delta N_t] &= E[N_{t+\Delta t}^A] - E[N_t^A] - (E[N_{t+\Delta t}^D] - E[N_t^D]) \\ &= \lambda(t + \Delta t) - \lambda t - \mu(t + \Delta t) + \mu t \\ &= \lambda t - \lambda t + \lambda \Delta t - \mu t + \mu t - \mu \Delta t \\ &= (\lambda - \mu) \Delta t := \beta \Delta t \end{aligned}$$

mit $\beta = (\lambda - \mu)$. Weiter gilt $N_t^A \sim \mathcal{N}(\lambda t, \lambda \text{SCV}[I] t)$ und $\text{Var}[\Delta N_t^D] = \mu \text{SCV}[S] \Delta t$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \text{Var}[N_{t+\Delta t}^A] &= \text{Var}[N_t^A] + \text{Var}[\Delta N_t^A] \\ \lambda \text{SCV}[I](t + \Delta t) &= \lambda \text{SCV}[I] t + \text{Var}[\Delta N_t^A] \\ \Leftrightarrow \text{Var}[\Delta N_t^A] &= \lambda \text{SCV}[I] \Delta t, \end{aligned}$$

und entsprechend $\text{Var}[\Delta N_t^D] = \mu \text{SCV}[S] \Delta t$. Damit wird

$$\begin{aligned} \text{Var}[\Delta N_t] &= \text{Var}[\Delta N_t^A] + \text{Var}[\Delta N_t^D] \\ &= \lambda \text{SCV}[I] \Delta t + \mu \text{SCV}[S] \Delta t \\ &= (\lambda \text{SCV}[I] + \mu \text{SCV}[S]) \Delta t =: \alpha \Delta t \end{aligned}$$

mit $\alpha = (\lambda SCV[I] + \mu SCV[S])$.

Im Folgenden wird gezeigt, dass der Prozess $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ für $\rho \rightarrow 1$ und $t \rightarrow \infty$ eine formale Ähnlichkeit zur Brownschen Bewegung aufweist. Deswegen liegt es nahe, die Brownsche Bewegung als Ersatzprozess für $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ heranzuziehen, wobei ihre Parameter geeignet anzupassen sind.

Diffusionsapproximation

(1) Ersetzung des diskreten Prozesses $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ durch einen stetigen Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$

Ein stochastischer Prozess mit unabhängigen, normalverteilten Zuwächsen und Startpopulation $X_0 = n_0$ ist auch die Brownsche Bewegung beziehungsweise der Brownsche Prozess. Dieser wird im Folgenden mit $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ bezeichnet. Er hat die Form

$$X_t = n_0 + \beta t + \sqrt{\alpha} W_t. \quad (3.3)$$

βt beschreibt den deterministischen und $\sqrt{\alpha} W_t$ den stochastischen Anteil, wobei $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ der Wiener-Prozess ist. Für die normalverteilten und unabhängigen Zuwächse im Intervall $[s, t]$ gilt:

$$X_t - X_s \sim \mathcal{N}(\beta(t - s), \alpha^2(t - s)), \quad t, s \in \mathbb{R}_0^+.$$

(2) Bestimmung der stationären Dichtefunktion des Diffusionsprozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$

Die bedingte Dichte $f(x, t \mid n_0)$ des Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x, t \mid n_0) &= \frac{\partial}{\partial x} P(X_t \leq x \mid X_0 = n_0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha t}} \exp\left(-\frac{(x - n_0 - \beta t)^2}{2\alpha t}\right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

$f(x, t \mid n_0)$ gibt die Wahrscheinlichkeit wieder, dass der Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ zum Zeitpunkt t einen Wert aus dem Intervall $[x, x + \Delta x]$ annimmt unter der Voraussetzung, dass $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ zum Zeitpunkt 0 den Wert n_0 besitzt. Durch Ableiten von (3.4) zeigt sich, dass $f(x, t \mid n_0)$ eine Lösung der Fokker-Planck-Gleichung ist. Mit mehr Aufwand lässt sich auch direkt zeigen, dass die Dichte $f(x, t \mid n_0)$ der Zufallsvariablen X_t des in (3.2) definierten Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ die Fokker-Planck-Gleichung erfüllen müssen. Dabei entspricht die

Fokker-Planck-Gleichung der Kolmogorovschen Vorwärtsgleichung, wie sie im Kontext zeitstetiger Markovketten bekannt ist.

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t | n_0) = \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t | n_0) - \beta \frac{\partial}{\partial x} f(x, t | n_0).$$

$(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ kann aufgrund der Ergodizitätsbedingung $\rho = \lambda/\mu < 1$ negative Werte annehmen, da die Drift beziehungsweise der Erwartungswert negativ ist. Für den diskreten Prozess $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ gilt jedoch stets $N_t \geq 0$. Daher muss an der Stelle $x = 0$ eine Randbedingung eingeführt werden, die den Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ in den Raum $]0, \infty)$ zurückführt, sollte dieser den Rand erreichen. In der Literatur sind zwei Randbedingungen beschrieben. Die reflektierende Schranke spiegelt den Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$, wenn dieser den Rand erreicht, in den zulässigen Raum zurück. Die Randbedingung modelliert die “heavy traffic” Annahme umfassend und stimmt nur für den Fall $\rho = 1$. Das Konzept der absorbierenden Schranke mit elementarer Rückkehr ist zu bevorzugen, da die Randbedingung die Abhängigkeit der Diffusionsapproximation von der “heavy traffic” Annahme reduziert und eine realistische mathematische Modellierung eines Warteschlangensystems ermöglicht. Diese Idee wurde erstmals von Gelenbe [Gel75] beschrieben und greift den von Feller [Fel54] beschriebenen Prozess der elementaren Rückkehr auf. Im Folgenden wird die absorbierende Schranke mit elementarer Rückkehr beschrieben.

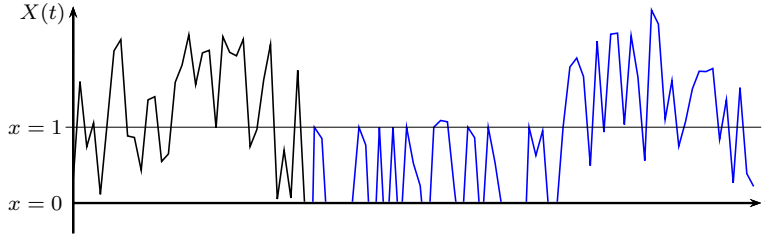


Abbildung 3.2: Brownsche Bewegung mit absorbierender Schranke und elementarer Rückkehr

Erreicht der Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ den Rand $x = 0$ wird dieser für eine (Rest-) Zwischenankunftszeit am Rand festgehalten und dann in den Raum $]0, \infty)$ zurückgeführt. Die Anforderung an die Randbedingung führt zur Bildung einer Wahrscheinlichkeitsmasse an der Stelle $x = 0$ und nach Ablauf der (Rest-) Zwischenankunftszeit zu nicht stetigen Pfaden zwischen 0 und 1 (Sprünge). Abbildung 3.2 stellt die Brownsche Bewegung mit einer absorbierenden

Schranke an der Stelle $x = 0$ und elementarer Rückkehr an die Stelle $x = 1$ dar.

Der Diffusionsprozess $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ soll sich im Intervall $]0, \infty)$ bewegen. Sei $x = 0$ der untere Rand, der mit einer Wahrscheinlichkeit R_t zum Zeitpunkt t angenommen wird. Tritt der Fall ein, dass $X_t \leq 0$, so verweilt der Prozess eine exponentiell verteilte Zeitdauer T im Zustand $x = 0$. Die Annahme von exponentiell verteilten Verweilzeiten an den Rändern geht auf Gelenbe [Gel79] zurück. Es wurde gezeigt, dass die Dichte $f(x, t | n_0)$ im stationärem Fall nur von den mittleren Verweilzeiten an den Rändern abhängt. Die exponentiell verteilte Zeitdauer T sorgt für die Beibehaltung der Markov-Eigenschaft und habe den Erwartungswert $1/\Lambda$. Der Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ springt anschließend mit Wahrscheinlichkeit 1 an die Stelle $x = 1$. Beschrieben wird das Sprungverhalten des Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ durch die Dirac-Delta Funktion $\delta(x - 1)$, welche bei $x = 1$ konzentriert ist. Die Dirac-Delta Funktion ergibt sich aus der Kombination der Diracschen Störfunktion δ mit der Heavisidefunktion

$$H(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Die Dichtefunktion $f(x, t | n_0)$ des Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ mit einer absorbierenden Schranke und elementarer Rückkehr charakterisiert die Lösung der Fokker-Planck-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t | n_0) - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t | n_0) + \beta \frac{\partial}{\partial x} f(x, t | n_0) = \Lambda R_t \delta(x - 1) \quad (3.6)$$

unter den Randbedingungen

$$\frac{dR_t}{dt} = \left[\frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t | n_0) - \beta f(x, t | n_0) \right]_{x=0} - \Lambda R_t,$$

$$f(0, t | n_0) = 0 \quad \forall t > 0$$

und der Normierungsbedingung

$$\int_0^\infty f(x, t | n_0) dx + R_t = 1.$$

Aufgrund der Annahme der Stationarität, $t \rightarrow \infty$ und $\rho \rightarrow 1$, die die Bedingungen

$$\begin{aligned} f(x | n_0) &:= \lim_{t \rightarrow \infty} f(x, t | n_0), \\ R &:= \lim_{t \rightarrow \infty} R_t \quad \text{und} \\ \frac{\partial f(x, t | n_0)}{\partial t} &= \frac{dR_t}{dt} = 0 \end{aligned}$$

nach sich ziehen, vereinfacht sich Gleichung (3.6) zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$-\frac{\alpha}{2} \frac{d^2}{dx^2} f(x, t \mid n_0) + \beta \frac{d}{dx} f(x, t \mid n_0) = \Lambda R \delta(x - 1)$$

mit den Randbedingungen

$$\left[\frac{\alpha}{2} \frac{d}{dx} f(x \mid n_0) - \beta f(x \mid n_0) \right]_{x=0} = \Lambda R \quad \text{und} \quad f(0) = 0,$$

sowie der Normierungsbedingung

$$\int_0^\infty f(x \mid n_0) dx + R = 1.$$

Unter Verwendung der Heavisidefunktion (3.5) ergibt sich

$$f(x \mid n_0) = \begin{cases} \tilde{\rho}(1 - e^{\gamma x}) & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ \tilde{\rho}(e^{-\gamma} - 1)e^{\gamma x} & \text{für } x > 1, \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

mit

$$\tilde{\rho} = -\frac{\Lambda R}{\beta} = \frac{\Lambda}{\Lambda + \mu - \lambda} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{2\beta}{\alpha}.$$

(3) Diskretisierung des Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$

Um zu einer geeigneten Approximation der stationären Zustandswahrscheinlichkeit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ zu finden, muss geeignet diskretisiert werden. Am bekanntesten sind die Methoden von Kobayashi[Kob74], Gelenbe [Gel75] und Halachmi und Franta[HW78]. Exemplarisch wird die Methode von Kobayashi erläutert, die sich für eine absorbierende Schranke mit elementarer Rückkehr eignet.

Unter Ausnutzung der Normierungsbedingung

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

ergibt sich durch Integration von (3.7) über die Intervalle $[n, n + 1)$ für

$n = 0$:

$$\begin{aligned}
p_0 &= \tilde{\rho} \int_0^1 (1 - e^{\gamma x}) dx \\
&= \tilde{\rho} + \frac{\tilde{\rho}}{\gamma} (1 - e^{\gamma}) \\
&= \tilde{\rho} + \tilde{\rho} \frac{\rho SCV[I] + SCV[S]}{2(1 - \rho)} (\hat{\rho} - 1),
\end{aligned}$$

und für $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
p_n &= \tilde{\rho} (e^{-\gamma} - 1) \int_n^{n+1} e^{\gamma x} dx \\
&= \frac{\tilde{\rho}}{\gamma} e^{\gamma n} (2 - e^{\gamma} - e^{-\gamma}) \\
&= \tilde{\rho} \frac{\rho SCV[I] + SCV[S]}{2(1 - \rho)} \hat{\rho}^{n-1} (\hat{\rho} - 1)^2
\end{aligned}$$

mit

$$\hat{\rho} := e^{\gamma} = \exp\left(\frac{2\beta}{\alpha}\right) = \exp\left(\frac{2(\lambda - \mu)}{\lambda SCV[I] + \mu SCV[S]}\right).$$

Durch Integration folgt:

$$E[N] = \tilde{\rho} \frac{\rho SCV[I] + SCV[S]}{2(1 - \rho)}.$$

3.1.3 Approximationsformel von Allen und Cunneen

Allen und Cunneen [All78] haben mittels empirischer Analysen eine Approximationsformel für die mittlere Verweilzeit für $G/G/c$ -Warteschlangensysteme gefunden. Die Approximation liefert eine obere Schranke. Im “heavy traffic” Fall, $\rho \rightarrow 1$, nimmt die Genauigkeit der Approximation zu. Die Approximationsformel hat die Form

$$E[T_q] \approx \frac{E[S] \cdot C(c, \rho)}{1 - \rho} \cdot \left(\frac{SCV[I] + SCV[S]}{2} \right)$$

wobei $C(c, \rho)$ die Wahrscheinlichkeit bedeutet, dass alle c parallelen Bediener besetzt sind. Zur Bestimmung von $C(c, \rho)$ kann die Erlang-C Formel herangezogen werden,

$$C(c, \rho) \approx \frac{\rho^c / c!}{(1 - \frac{\rho}{c}) \left[\left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} \right) + \frac{\rho^c}{c!(1 - \frac{\rho}{c})} \right]},$$

der ein $M/M/c$ -Warteschlangensystem zugrunde liegt. Für die Blockierwahrscheinlichkeit können aber auch andere Approximationen herangezogen werden [BGMT06].

Die quadrierten Variationskoeffizienten $SCV[I]$ und $SCV[S]$ berechnen sich aus dem ersten und zweiten Moment der Verteilungen der Zwischenankunfts- und Bedienzeiten:

$$SCV[\cdot] = \frac{E[\cdot^2]}{E[\cdot]^2} - 1.$$

Die Formel ist für Warteschlangensysteme, die eine bekannte geschlossene analytische Lösung besitzen, z. B. $M/M/c$ ($SCV[I] = SCV[S] = 1$) und $M/G/1$, in der Regel exakt.

Vergleichbare Formeln sind die Formel von Kingman [Kin62a] für das $G/G/1$ -Warteschlangensystem, Martin’s Formel [Mar72] für das $M/G/c$ -Warteschlangensystem und die Adaption der Diffusionsapproximation für $G/G/c$ -Warteschlangensysteme von Heyman und Sobel [HS82].

Weitere Anhaltspunkte liefern die oberen und unteren Schranken für die stationäre Lösung der Zustandswahrscheinlichkeiten eines $G/G/1$ -Warteschlangensystems. Die Schranken beruhen auf bekannten Lösungen von $M/G/1$ - und $G/M/1$ -Warteschlangensystemen und sind je nach Ausprägung der quadrierten Variationskoeffizienten der Zwischenankunfts- und Bedienzeiten zu wählen

[BGMT06]. Für $G/G/1$ -Warteschlangensysteme wurden obere und untere Schranken von Kleinrock [Kle75] und Marchal [Mar78] erforscht. Kingman [Kin70] entwickelte für das $G/G/c$ -Warteschlangensystem eine obere Schranke und Brumelle [Bru71] und Marchal [Mar74] stellten eine untere Schranke vor. Eine Approximation der Verteilung der Wartezeit in einem $G/G/c$ -Warteschlangensystem wird von Kingman und Köllerström [Köl74] gegeben.

Approximationsformel von Martin für das $M/G/c$ -Warteschlangensystem

Martin entwickelte seine approximative Formel auf Basis der exakten Lösung für das $M/G/1$ -Warteschlangensystem, die von Kleinrock [Kle75] entscheidend vorangebracht wurde. Ein weiteres Lösungsverfahren für $M/G/1$ -Warteschlangensysteme bietet die Pollaczek-Khintchine-Formel, die zum gleichen Ergebnis kommt, aber einen anderen Ansatz verwendet.

Die mittlere Wartezeit eines $M/G/c$ -Warteschlangensystems berechnet sich aus den Komponenten $E[S_R]$ und $E[N_q] \cdot E[S]$. $E[S_R]$ beschreibt die restliche Zeit, die ein sich in Bedienung befindender Auftrag noch bearbeitet wird und $E[N_q] \cdot E[S]$ charakterisiert die Summe der mittleren Bedienzeit der Aufträge, die sich in der Warteschlange aufhalten. Es resultiert für die mittlere Wartezeit in der Warteschlange

$$E[T_q] = E[S_R] + \frac{E[N_q]}{c} \cdot E[S] \quad (3.8)$$

mit

$$\begin{aligned} E[S_R] &= P(\text{Bediener sind aktiv}) \cdot E[R] + P(\text{min. ein Bediener ist inaktiv}) \cdot 0 \\ &= P_c \cdot E[R]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die Rest-Bedienzeit eines Auftrags berechnet sich aus der Blockierwahrscheinlichkeit P_c und der mittleren Zeit, um die gegenwärtigen Bedienungen abzuschließen. Die i.i.d. Folge $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschreibt die Zeit, die die Bearbeitung eines Auftrags noch benötigt, wenn ein weiterer Auftrag das System betritt. Das erste Moment $E[R]$ wurde von Kleinrock [Kle75] für den Einbediener-Fall beschrieben durch

$$E[R] = E[S] \frac{(1 + SCV[S])}{2}.$$

Das erste Moment der Folge $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat Martin für den Mehrbediener-Fall approximiert durch

$$E[R] \approx E[S] \frac{(1 + SCV[S])}{2c}. \quad (3.10)$$

Für das $M/M/1$ -System ist die mittlere Restbedienzeit durch

$$E[R] = E[S] = \frac{1}{\mu} \quad (3.11)$$

gegeben. Wird (3.8) umgestellt und aus dem Satz von Little $E[T_q] = \lambda E[N_q]$ verwendet, resultiert:

$$\begin{aligned} E[T_q] &= E[S_R] + \frac{E[N_q]}{c} E[S] \\ &= E[S_R] + \rho E[T_q] \\ &= \frac{E[S_R]}{1 - \rho}. \end{aligned}$$

Werden (3.9), (3.10) und (3.11) in die obere Gleichung eingesetzt, resultiert

$$E[T_q] = \frac{E[S] \cdot P_c}{1 - \rho} \cdot \frac{1 + SCV[S]}{2c}. \quad (3.12)$$

Für P_c kann beispielsweise die Erlang-C Formel oder eine andere Approximation verwendet werden. Gleichung (3.12) entspricht offensichtlich einem Sonderfall ($SCV[I] = 1$) der Approximationsformel von Allen und Cunneen.

Formel von Kingman

Die Approximationsformel für das $G/G/1$ -Warteschlangensystem von Kingman [Kin62a] basiert auf der rekursiven Berechnung der Wartezeiten T_q , die auch als Lindley Rekursion bekannt ist. Betritt ein Auftrag das Warteschlangensystem, wird eine Fallunterscheidung vorgenommen. Im ersten Fall ist das Warteschlangensystem leer und der $(n + 1)$ -te Auftrag kann umgehend bearbeitet werden. Das bedeutet für die Wartezeit des Auftrags $T_{q,n+1} = 0$. Findet der $(n + 1)$ -te Auftrag den Bediener im aktiven Zustand vor, beträgt die Wartezeit

$$T_{q,n+1} = T_{q,n} + S_n - I_n.$$

Werden beide Fälle kombiniert, resultiert

$$T_{q,n+1} = \max \{0, T_{q,n} + S_n - I_n\}. \quad (3.13)$$

Die Folge der Wartezeiten $(T_{q,n})_{n \in \mathbb{N}}$ entspricht einer Markov-Kette mit dem Zustandsraum \mathbb{R}_0^+ . Wird $U_n = S_n - I_n$ gesetzt, lässt sich (3.13) überführen in

$$T_{q,n+1} = \max \{0, T_{q,n} + U_n\}.$$

Da die Folgen $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ voneinander unabhängige i.i.d. Folgen sind, bildet $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls eine i.i.d. Folge. Wird die Annahme getroffen, dass das Warteschlangensystem anfangs leer ist, $T_{q,0} = 0$, lässt sich die Wartezeit des $(n+1)$ -ten Auftrags rekursiv berechnen durch:

$$T_{q,n+1} = \max \{0, U_n, U_n + U_{n-1}, \dots, U_n + U_{n-1} + \dots + U_0\}.$$

Über die rekursive Berechnung wird der Fall abgedeckt, dass sich beim Eintreten des $(n+1)$ -ten Auftrags bereits mehrere Aufträge im System befinden. Mit

$$V_j = U_n + U_{n-1} + \dots + U_{n-j+1} \quad \text{und} \quad V_0 = 0$$

lässt sich die Wartezeit in

$$T_{q,n+1} = \max \{V_0, V_1, \dots, V_n\}$$

umschreiben. Für $n \rightarrow \infty$ folgt

$$T_q = \sup_i V_i$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{n} = E[U_i],$$

wobei

$$E[U_i] = \begin{cases} < 0 & , \text{ wenn } \rho < 1, \\ > 0 & , \text{ wenn } \rho > 1. \end{cases}$$

Die Markov-Kette $(T_{q,n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist im Fall $\rho < 1$ positiv rekurrent und es existiert eine stationäre Verteilung.

Wird $\cdot^+ = \max \{0, \cdot\}$ und $\cdot^- = -\min \{0, \cdot\}$ gesetzt und existieren $T_q = \lim T_{q,n}$ und $U = \lim U_n$ und sind beide Grenzwerte endlich, lässt sich die ursprüngliche Relation (3.13) überführen in

$$E[T_q] = E[(T_q + U)^+] \quad \text{und} \quad \text{Var}[T_q] = \text{Var}[(T_q + U)^+].$$

Die Aufteilung in einen positiven und negativen Teil der Verteilung erfolgt, da für die gesuchte Formel nur der positive Anteil von Interesse ist, für den $(T_q + U)^+ \sim T_q$ aufgrund der Annahme $\rho < 1$ gilt. Jedoch sind nur Maßzahlen über die gesamte Verteilung bekannt. Mit Hilfe der Gleichung von

Bienaymé ($Var[X - Y] = Var[X] + Var[Y]$ für unkorrelierte reellwertige Zufallsvariablen X und Y) und der Beziehung

$$T_q = T_q + U - U = (T_q + U)^+ - (T_q + U)^- - U \Rightarrow (T_q + U)^- \sim -U$$

lässt sich die Varianz $Var[U]$ ermitteln:

$$\begin{aligned} Var[T_q] + Var[U] &= Var[T_q + U] \\ &= Var[(T_q + U)^+ - (T_q + U)^-] \\ &= Var[(T_q + U)^+] + Var[(T_q + U)^-] \\ &\quad + 2Cov[(T_q + U)^+, -(T_q + U)^-] \\ &= Var[T_q] + Var[(T_q + U)^-] \\ &\quad + 2E[(T_q + U)^+ \cdot -(T_q + U)^-] \\ &\quad - 2E[(T_q + U)^+] \cdot E[-(T_q + U)^-] \\ &= Var[T_q] + Var[(T_q + U)^-] \\ &\quad + 2E[(T_q + U)^+]E[(T_q + U)^-] \\ &= Var[T_q] + Var[(T_q + U)^-] + 2E[T_q]E[-U] \\ Var[U] &= Var[(T_q + U)^-] - 2E[T_q]E[U]. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Wird Gleichung (3.16) nach $E[T_q]$ aufgelöst, resultiert

$$E[T_q] = \frac{Var[U]}{2\lambda(1 - \rho)} - \frac{Var[(T_q + U)^-]}{2\lambda(1 - \rho)}, \tag{3.15}$$

wobei

$$E[U] = -\lambda(1 - \rho)$$

ist. Gleichung (3.15) kann überführt werden in die herkömmliche Notation

$$E[T_q] \leq \frac{E[S] \cdot \rho}{1 - \rho} \cdot \frac{\frac{1}{\rho^2}SCV[I] + SCV[S]}{2} \tag{3.16}$$

und bildet eine obere Schranke durch die Vernachlässigung des Subtrahenden in (3.15). Wird die heavy-traffic Annahme genutzt, ergibt sich

$$E[T_q] \approx \frac{E[S] \cdot \rho}{1 - \rho} \cdot \frac{SCV[I] + SCV[S]}{2}.$$

Erweiterung von Krämer/Langenbach-Belz [1976]

Die Formel von Allen und Cunneen wurde in der Folge erweitert und verbessert. Ein Großteil der Verbesserungen bezieht sich auf die stochastische Variabilität, welche durch den zweiten Term der Formel repräsentiert wird. Krämer und Langenbach-Belz [KLB76] entwickelten einen Korrekturfaktor, der die stochastische Variabilität mittels einer Fallunterscheidung korrigiert. Der Korrekturfaktor wurde ursprünglich für $G/G/1$ -Warteschlangensysteme entwickelt und nutzt als Ausgangspunkt Ergebnisse der Diffusionsapproximation von Mehrbedienersystemen, die von Heyman [Hey70] vorgestellt wurden. Da die Approximationsformel sowie die oberen Schranken auf der “heavy traffic” Annahme basieren, führen die Ergebnisse in Fällen einer mittleren oder geringen Auslastung unter Umständen zu Fehlern. Beispielsweise weist die obere Schranke von Kingman [Kin62b] (3.16)

$$E[T_q] \leq \frac{E[S] \cdot \rho}{1 - \rho} \cdot \frac{\frac{1}{\rho^2} SCV[I] + SCV[S]}{2}$$

im Fall einer Auslastung von $\rho = 0.7$ bereits eine Abweichung von 100% auf [KLB76]. Ausgegangen sind Krämer und Langenbach-Belz von

$$E[T_q] \approx \frac{E[S] \cdot \rho}{1 - \rho} \cdot \frac{SCV[I] + SCV[S]}{2} \cdot g_{KLB}(\rho, SCV[I], SCV[S]),$$

wobei $g_{KLB}(\rho, SCV[I], SCV[S])$ eine noch zu spezifizierende Funktion ist. Die Approximation der mittleren Wartezeit stammt von Heyman [Hey70] und besitzt die gleiche Form wie die Formel von Kingman [Kin62a]. Mit Hilfe von Simulationsstudien konnten Krämer und Langenbach-Belz den Ausgleichsterm bestimmen, der folgende Restriktionen erfüllt

- i) für $SCV[I]=1$ sollte die Polaczek-Khintchin-Formel $g_{KLB}(\rho, 1, SCV[S]) = 1$ erfüllt sein,
- ii) aus dem “heavy traffic” Fall sollte $g_{KLB}(1, SCV[I], SCV[S]) = 1$ resultieren und
- iii) für ein $D/D/1$ -System beträgt die Wartezeit $g_{KLB}(\rho, 0, 0) < 0$.

Eine gute Approximation der mittleren Wartezeit in einem $D/M/1$ -Warteschlangensystem ist

$$E[T_q] \approx \frac{E[S] \cdot \rho}{2(1 - \rho)} \cdot \exp\left(-\frac{2(1 - \rho)}{3\rho}\right).$$

Für Erlang-verteilte Ankünfte ($SCV[I] \leq 1$) resultiert für $g_{KLB}(\rho, SCV[I], SCV[S])$ unter Berücksichtigung aller Restriktionen

$$g_{KLB}(\rho, SCV[I], SCV[S]) = \exp \left(-\frac{2(1-\rho)}{3\rho} \cdot \frac{(1-SCV[I])^b}{aSCV[I] + SCV[S]} \right).$$

a und b seien freie Parameter. Durch Simulationsstudien, die beispielsweise zur Parametrisierung des Ankunftsstroms die Erlang-Verteilungen E_4 und E_2 verwenden, hat sich gezeigt, dass der Korrekturfaktor mit der Wahl von $a = 1$ und $b = 2$ die Güte der Approximationen verbessert.

Ist der Prozess der Zwischenankunftszeiten hyperexponential-verteilt ($SCV[I] \geq 1$) und werden die Restriktionen (i) und (ii) hinzugezogen, ergibt sich für den Korrekturfaktor

$$g_{KLB}(\rho, SCV[I], SCV[S]) = \exp \left(-(1-\rho) \frac{(SCV[I]-1)^c}{aSCV[I] + bSCV[S]} \right).$$

a , b und c sind frei wählbare Parameter. Vergleiche mit einer Simulationsstudie, die $H_2/D/1$ -Warteschlangensysteme ($SCV[I] = 2$) beinhaltet, führen zu einer Wahl von $a = 1$. Wird $SCV[I] = 4$ gewählt, resultiert bei Nutzung der gleichen Fallstudie $c = 1$. Um den freien Parameter b zu erhalten, wurde eine Simulationsfallstudie mit $H_2/M/1$ -Warteschlangensystemen ausgewertet, was zu $b = 4$ führte.

Entsprechend der obigen Wahl der Parameter lässt sich der Korrekturterm $g_{KLB}(\rho, SCV[I], SCV[S])$ beschreiben durch

$$g_{KLB}(\rho, SCV[I], SCV[S]) = k_{KLB} = \begin{cases} \exp \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{1-\rho}{\rho} \cdot \frac{(1-SCV[I])^2}{SCV[I] + SCV[S]} \right) & , \text{ für } SCV[I] \leq 1 \\ \exp \left(-(1-\rho) \frac{SCV[I]-1}{SCV[I] + 4SCV[S]} \right) & , \text{ für } SCV[I] > 1. \end{cases}$$

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass der Korrekturfaktor von Krämer und Langenbach-Belz gute Ergebnisse liefert, wenn sich die quadrierten Variationskoeffizienten der Zwischenankunfts- und Bedienzeiten zwischen

$$\begin{aligned} 0.25 < SCV[I] &\leq 1.25 \\ 0.25 < SCV[S] &\leq 1.25 \end{aligned}$$

bewegen [BGMT06].

Eine Erweiterung des Korrekturfaktors auf den Mehrbediener-Fall erfordert lediglich die Ersetzung von ρ im Fall $SCV[I] \leq 1$ durch die Blockierwahrscheinlichkeit P_c :

$$g(\rho, SCV[I], SCV[S]) = k_{KLB} = \begin{cases} \exp \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{1-\rho}{P_c} \cdot \frac{(1-SCV[I])^2}{SCV[I] + SCV[S]} \right) & , \text{ für } SCV[I] \leq 1 \\ \exp \left(-(1-\rho) \frac{SCV[I]-1}{SCV[I] + 4SCV[S]} \right) & , \text{ für } SCV[I] > 1. \end{cases}$$

3.2 Das $G^X/G^{(b,b)}/c$ -Warteschlangensystem im Ein-Produktfall

3.2.1 Modellbeschreibung

Für die Folgen $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird die i. i. d. Eigenschaft vorausgesetzt. Die Zwischenankunfts- und Bedienzeiten sind allgemein verteilt und unabhängig voneinander. Die Aufträge treten in Gruppen vom Umfang X_1, X_2, \dots in das Warteschlangensystem ein. Die Zufallsvariablen der Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzen die i. i. d. Eigenschaft und sind identisch verteilt zur Größe X .

Die Bedienung erfolgt ebenfalls in Gruppen. Die Bedienregel legt die erforderliche Gruppengröße fest, die für alle c parallel arbeitenden und identischen Bediener gleich ist. In der Kurznotation der zu untersuchenden Warteschlangensysteme wird die Regel über das hochgestellte Tupel (a, b) am Verteilungstyp der Bedienzeiten beschrieben. a beschreibt die minimale und b die maximale Größe, die die Lose¹ aufweisen müssen, um bearbeitet zu werden. Die festgelegte Losgröße wird auch Batchgröße genannt. Im $G^X/G^{(b,b)}/c$ -Warteschlangensystem wird gefordert, dass die Batchgröße genau $b \in \mathbb{N}$ groß ist. Der Spezialfall $b = 1$ entspricht der Modellierung eines $G^X/G/c$ -Warteschlangensystems, das zwar Gruppenankünfte, aber keine Gruppenbedienung besitzt.

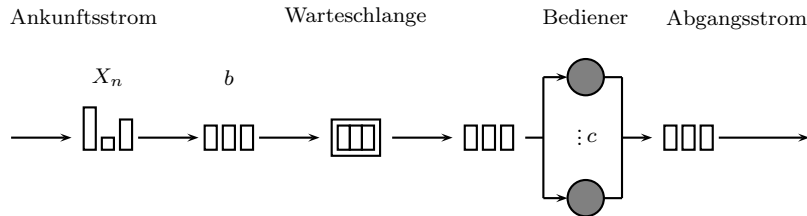


Abbildung 3.3: Modell eines Warteschlangensystems mit Gruppenankünften und -bedienung im Ein-Produktfall

Eine Bedienung kann also erst erfolgen, wenn die nötige Batchgröße erreicht ist. Ist dies nicht der Fall, müssen die Aufträge solange warten bis ein Los der Größe b erzeugt werden kann. Sollten alle Bediener aktiv sein, reiht sich das Los in die Warteschlange ein. Lose werden nach dem *FCFS*-Prinzip aus der Warteschlange ausgewählt. Wurde ein Los der Größe b von einem Bediener vollständig bearbeitet, verlässt es das Warteschlangensystem als Los der Größe b .

¹Los und Batch werden im Folgenden synonym verwendet.

3.2.2 Diffusionsapproximation [1999]

Für Warteschlangensysteme mit Gruppenankünften und -bedienungen und beliebigen Verteilungen der Zwischenankunfts- und Bedienzeiten existieren keine exakten Lösungen der stationären und transienten Verteilungen der Zustandswahrscheinlichkeiten. In [Zis99] wird die Diffusionsapproximation zur Bestimmung der stationären Verteilung der Zustandswahrscheinlichkeiten für $G^X/G^{(b,b)}/1$ -Warteschlangensysteme auf Basis der Arbeiten von Chiamsiri und Leonard [CL81] weiter entwickelt. Die Idee ist, dass die bisherige Schranke in der Diffusionsapproximation von $x = 0$ auf $x = b - 1$ gesetzt wird.

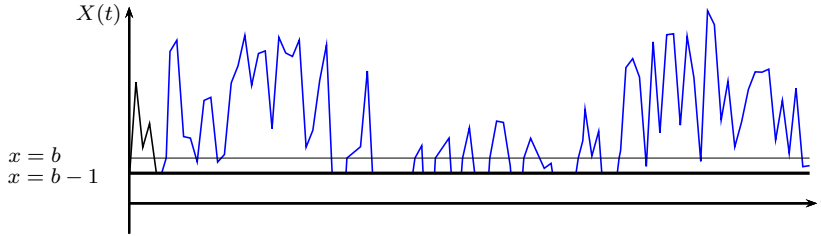


Abbildung 3.4: Brownsche Bewegung mit verschobener absorbierender Schranke und elementarer Rückkehr

Beschreibung des diskreten Prozesses $(N_t^\Sigma)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$

Seien N_t^A und N_t^D wieder die mit den Folgen $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ assoziierten Zählprozesse, wobei jetzt aber nicht Lose sondern Aufträge gezählt werden. Entsprechend charakterisiere

$$N_t^\Sigma = N_t^A - N_t^D + n_0, \quad n_0 = N_0$$

die Anzahl an Aufträgen im Warteschlangensystem zum Zeitpunkt t . Die Zuwächse im Intervall $[t, t + \Delta t]$ berechnen sich gemäß

$$\Delta N_t^\Sigma = \Delta N_t^A - \Delta N_t^D.$$

Die Zuwächse besitzen für das $G^X/G^{(b,b)}/1$ -Warteschlangensystem die gleichen formalen Eigenschaften wie für das $G/G/1$ -Warteschlangensystem und können deshalb auf analoge Weise berechnet werden. Als Hilfsmittel wird die Wald'sche Gleichung benötigt:

Satz 3 (Wald'sche Gleichung)

[Wald]

Es sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und N und $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien Zufallsvariablen über einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum. N habe Werte in \mathbb{N} und $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit Werten in \mathbb{R} . Außerdem seien N und X_j , $j \in \mathbb{N}$, unabhängig. Es sei

$$Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Dann gilt:

- i) $E[Y] = E[N] \cdot E[X_1]$, sofern $E[N] < \infty$ und $E[X_1] < \infty$,
- ii) $Var[Y] = E[N] \cdot Var[X_1] + Var[N](E[X_1])^2$, sofern $Var[N] < \infty$ und $Var[X_1] < \infty$.

Die zweite Wald'sche Gleichung ist in der Literatur auch unter dem Namen Blackwell-Girshick Gleichung bekannt.

Mit Hilfe der Wald'schen Gleichung ergibt sich für den Erwartungswert des Prozesses N_t^A

$$E[N_t^A] = \lambda t E[X]$$

und die Varianz

$$Var[N_t^A] = Var[X] \lambda t + \lambda SCV[X] t E[X]^2.$$

Analog lassen sich die Momente für den Prozess N_t^D ermitteln, wobei zu beachten ist, dass die Batchgröße b des Bedieners eine Konstante darstellt und somit die Varianz 0 besitzt.

$$\begin{aligned} E[N_t^D] &= \mu t b, \\ Var[N_t^D] &= \mu t 0 + \mu SCV[S] t b^2 = \mu SCV[S] t b^2. \end{aligned}$$

Um die Parameter α und β zu ermitteln, werden der Erwartungswert und die Varianz von ΔN_t^Σ berechnet:

$$\begin{aligned} E[\Delta N_t^\Sigma] &= \lambda(t + \Delta t)E[X] - \lambda t E[X] - (\mu(t + \Delta t)b - \mu t b) \\ &= (\lambda E[X] - \mu b) \Delta t := \beta \Delta t. \end{aligned}$$

Um die Varianz von ΔN_t^Σ zu erhalten, bedarf es eines Zwischenschritts:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\Delta N_t^A] &= \text{Var}[N_{t+\Delta t}^A] - \text{Var}[N_t^A] \\ &= \text{Var}[X]\lambda(t + \Delta t) + \lambda \text{SCV}[I](t + \Delta t)E[X]^2 \\ &\quad - (\text{Var}[X]\lambda t + \lambda \text{SCV}[I]tE[X]^2) \\ &= \text{Var}[X]\lambda \Delta t + \lambda \text{SCV}[I]\Delta t E[X]^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{Var}[\Delta N_t^D] &= \text{Var}[N_{t+\Delta t}^D] - \text{Var}[N_t^D] \\ &= \mu \text{SCV}[S](t + \Delta t)b^2 - \mu \text{SCV}[S]tb^2 \\ &= \mu \text{SCV}[S]\Delta t b^2. \end{aligned}$$

Die Varianz des Prozesses ΔN_t^Σ beziehungsweise der Parameter α kann nun ermittelt werden:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\Delta N_t^\Sigma] &= \text{Var}[\Delta N_t^A] + \text{Var}[\Delta N_t^D] \\ &= E[X]^2 \lambda \text{SCV}[I]\Delta t + \text{Var}[X]\lambda \Delta t + \mu \text{SCV}[S]b^2 \Delta t \\ &= (E[X]^2 \lambda \text{SCV}[I] + \text{Var}[X]\lambda + \mu \text{SCV}[S]b^2)\Delta t := \alpha \Delta t. \end{aligned}$$

Diffusionsapproximation

(1) Ersetzung des diskreten Prozesses $(N_t^\Sigma)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ durch einen Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$

Analog zum Warteschlangenprozess $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ eines $G/G/1$ -Warteschlangensystems approximiert die Brownsche Bewegung auch den Prozess $(N_t^\Sigma)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ eines $G^X/G^{(b,b)}/1$ -Systems:

$$X_t = n_0 + \beta t + \sqrt{\alpha} W_t, \quad (3.17)$$

mit entsprechenden Werten für α und β .

(2) Bestimmung der stationären Dichtefunktion des Diffusionsprozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$

Die bedingte Dichte $f(x, t \mid n_0)$ des Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x, t \mid n_0) &= \frac{\partial}{\partial x} P(X_t \leq x \mid X_0 = n_0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha t}} \exp\left(-\frac{(x - n_0 - \beta t)^2}{2\alpha t}\right) \end{aligned}$$

und ist Lösung der Fokker-Planck-Gleichung, welche sich mit Hilfe von (3.17) ableiten lässt zu:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t \mid n_0) = \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t \mid n_0) - \beta \frac{\partial}{\partial x} f(x, t \mid n_0).$$

Die Modellierung der absorbierenden Schranke mit elementarer Rückkehr aus dem Abschnitt 3.1.2 kann nicht analog übernommen werden. Die Rand- und Normierungsbedingung müssen an die Gruppenankünfte und -bedienung angepasst werden. Die Modifikation der Schranke $x = b - 1$ führt zu den Randbedingungen

$$\begin{aligned} f(b - 1, t \mid n_0) &= 0 \quad \forall t > 0, \\ \frac{dR_t}{dt} &= \left[\frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t \mid n_0) - \beta f(x, t \mid n_0) \right]_{x=b-1} - \Lambda R_t \end{aligned}$$

und der Normierungsbedingung

$$\int_{b-1}^{\infty} f(x, t \mid n_0) dx + R_t = 1.$$

Die Fokker-Planck-Gleichung besitzt nun die Form

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t \mid n_0) - \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t \mid n_0) + \beta \frac{\partial}{\partial x} f(x, t \mid n_0) = \Lambda R_t \delta(x - b).$$

Durch eine Betrachtung von $t \rightarrow \infty$ und $\rho \rightarrow 1$ lässt sich die Gleichung analog zum Fall in Abschnitt 3.1.2 zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung vereinfachen

$$\frac{d}{dt} f(x, t \mid n_0) - \frac{1}{2} \alpha \frac{d^2}{dx^2} f(x, t \mid n_0) + \beta \frac{d}{dx} f(x, t \mid n_0) = \Lambda R \delta(x - b)$$

mit den Randbedingungen

$$\left[\frac{\alpha}{2} \frac{d}{dx} f(x \mid n_0) - \beta f(x \mid n_0) \right]_{x=b-1} = \Lambda R \quad \text{und} \quad f(x)|_{x=b-1} = 0,$$

und der Normierungsbedingung

$$\int_{b-1}^{\infty} f(x \mid n_0) dx + R = 1.$$

Wird die gewöhnliche Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Heavisidefunktion (3.5) gelöst, resultiert für die Dichte des Ersatzprozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\Lambda}{\gamma\alpha} R (e^{-\gamma(b-1)} e^{\gamma x} - 1) & \text{für } b - 1 \leq x < b \\ \frac{2\Lambda}{\gamma\alpha} R (e^{-\gamma(b-1)} - e^{-\gamma}) e^{\gamma x} & \text{für } x \geq b \\ 0 & \text{für } x < b - 1 \end{cases}$$

mit

$$\gamma = \frac{2\beta}{\alpha}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ den Rand $x = b - 1$ erreicht, ist durch R gegeben und lässt sich durch Integration der Normierungsbedingung bestimmen:

$$R = \left[\frac{2\Lambda}{\gamma\alpha} \left(\frac{1}{\gamma} e^{\gamma(b-1)} - \frac{1}{\gamma} - 1 \right) + 1 \right]^{-1}.$$

(3) Diskretisierung des Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$

In [Zis99] bzw. [Zis09] wurde eine modifizierte Methode von Kobayashi zur Diskretisierung des Ersatzprozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ verwendet. Sei $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Wahrscheinlichkeitsvektor der stationären Zustandswahrscheinlichkeiten bezogen auf die Aufträge. Es gilt die Nebenbedingung

$$\sum_{n=b-1}^{\infty} p_n = 1$$

mit der Folge

$$p_{b-1} = 1 - \sum_{n=b}^{\infty} p_n.$$

Die Methode von Kobayashi angewendet auf $G^X/G^{(b,b)}/c$ -Warteschlangensysteme führt zu

$$p_n = \int_n^{n+1} f(x) dx \quad \text{für } n = b, b+1, b+2, \dots$$

Durch Integration ergibt sich für den Fall $x \geq b$ für den Wahrscheinlichkeitsvektor $(p_n)_{n \geq b}$

$$p_n = \frac{1}{\gamma} \frac{2\Lambda}{\gamma\alpha} R \left(\hat{\rho}^{-(b-1)} - \frac{1}{\hat{\rho}} \right) (\hat{\rho} - 1) \hat{\rho}^n,$$

wobei $\hat{\rho} = e^\gamma$. Wird der ermittelte Vektor $(p_n)_{n \geq b}$ der stationären Zustandswahrscheinlichkeiten in die Normierungsbedingung eingesetzt, resultiert

$$\begin{aligned} p_{b-1} &= 1 - \underbrace{\frac{1}{\gamma} \frac{2\Lambda}{\gamma\alpha} R (\hat{\rho}^{b-1} - \hat{\rho})}_{\tilde{\rho}} \\ &= 1 - \tilde{\rho}. \end{aligned}$$

Im Fall, dass sich mindestens b Aufträge im Warteschlangensystem aufhalten ($N^\Sigma \geq b$), berechnet sich die mittlere Anzahl an Aufträgen im Warteschlangensystem durch

$$E[N^\Sigma \mid N^\Sigma \geq b] \cdot P(N \leq b-1) = \sum_{n=b}^{\infty} np_n = \tilde{\rho}(b + \frac{\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}}).$$

Ist $N^\Sigma < b-1$ gilt für die Verweilzeit am Rand

$$\Lambda = \frac{b}{E[X]}E[I].$$

Interpretiert beschreibt die Verweilzeit die mittlere Zeit, die vergeht, um ein vollständiges Los für den Bediener bereitzustellen. Dabei stellt $b/E[X]$ die Zeit dar, die maximal vergeht, um ein vollständiges Los zu generieren. Der Fall $N^\Sigma \leq b-1$ kann nun charakterisiert werden durch

$$E[N^\Sigma \mid N^\Sigma \leq b-1] = \frac{b-1}{2}.$$

$(b-1)/2$ repräsentiert eine obere Schranke. Der Term wird in Abschnitt 3.2.3 hergeleitet.

Die Kennzahl der mittleren Anzahl Aufträge im Warteschlangensystem ergibt sich aus den zwei Fällen, indem mit einer Wahrscheinlichkeit von ρ sich mindestens b Aufträge im Warteschlangensystem aufhalten und mit einer Wahrscheinlichkeit von $1-\rho$ sich weniger als b Aufträge im Warteschlangensystem befinden. Entsprechend resultiert

$$\begin{aligned} E[N^\Sigma] &= \frac{b-1}{2}(1-\rho) + \tilde{\rho} \left(b + \frac{\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}} \right) \rho \\ &= \frac{b-1}{2} + \rho \left[\frac{\tilde{\rho}\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}} + \tilde{\rho}b - \frac{b-1}{2} \right]. \end{aligned}$$

3.2.3 Approximationsformel von Allen und Cunneen [2006]

In [Han06] wurde die Formel von Allen und Cunneen für die Anwendung auf allgemeine Warteschlangensysteme mit Gruppenankünften und -bedienung weiterentwickelt. Die Grundidee der Modifikation besteht darin, dass zunächst Lose der Größe b in einem vorgeschalteten Bereich des Warteschlangensystems erzeugt und anschließend dem Warteschlangensystem zugeführt werden. Der Sinn der Modifikation besteht darin, dass lediglich der Eingangsstrom angepasst und die mittlere Anzahl Aufträge im Batching-Bereich berechnet werden muss, um die Approximationsformel anwenden zu können. Der Rest-Bereich ahmt das Arbeitsprinzip eines $G/G/c$ -Warteschlangensystems nach, indem die zuvor im Batching-Bereich erzeugten Lose wie einzelne Aufträge behandelt werden.

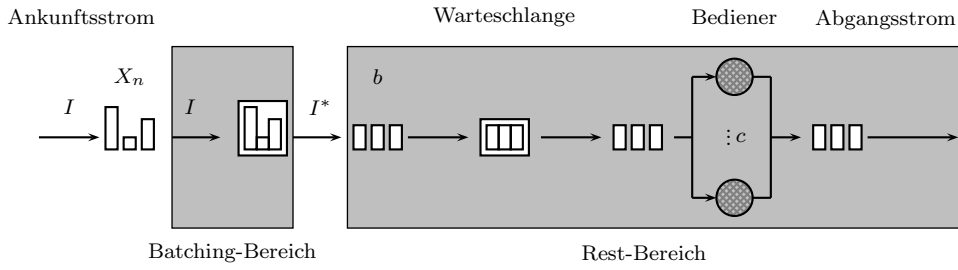


Abbildung 3.5: Modell eines Warteschlangensystems mit Gruppenankünften und -bedienung mit Batching- und Rest-Bereich

Stochastischer Prozess zur Beschreibung der Anzahl Aufträge im Batching-Bereich

Zunächst wird für den Batching-Bereich die mittlere Anzahl wartender Aufträge ermittelt. Sei Z_n^* die Anzahl Aufträge im Batching-Bereich unmittelbar nach Ankunft des n -ten Loses, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$Z_n^* = (Z_{n-1}^* + X_n) \mod b, n \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad Z_0^* = 0.$$

Die Rekursionsgleichung ermittelt die Anzahl Aufträge, die nach der Losbildung jeweils übrig bleiben. Demnach gilt $Z_n^* < b$. Wird nun $Z^* = (Z_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ betrachtet, so stellt Z^* eine homogene Markov-Kette mit Zustandsraum $E = \{0, 1, \dots, b-1\}$ dar. Ihre Übergangswahrscheinlichkeiten berechnen sich gemäß

$$q_i := P(X = i \mod b) \quad \text{mit } i \in E.$$

Die Übergangsmatrix $Q = (p_{ij})_{0 \leq i, j \leq b-1}$ ist doppelt stochastisch und besitzt die Form

$$Q = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & \cdots & q_{b-2} & q_{b-1} \\ q_{b-1} & q_0 & q_1 & \cdots & q_{b-3} & q_{b-2} \\ q_{b-2} & q_{b-1} & q_0 & \cdots & q_{b-4} & q_{b-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ q_1 & q_2 & q_3 & \cdots & q_{b-1} & q_0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der n -Schritt-Übergangsmatrix $Q^{(n)} := Q^n$ für $n \in \mathbb{N}$ können anschließend die zu Z^* gehörenden Äquivalenzklassen (im Sinne von Kommunikationsklassen) bestimmt werden, die mit M_1, \dots, M_k bezeichnet werden. Durch Zeilen- und Spaltenvertauschung kann Q in eine Block-Diagonal-Form transformiert werden

$$Q' = \begin{pmatrix} Q_1 & & & \\ & Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_k \end{pmatrix}.$$

Die Blöcke bilden die jeweiligen Äquivalenzklassen ab und sind wieder doppelt stochastisch. Da das zu untersuchende Warteschlangensystem anfangs leer ist, wird ausschließlich die zu $i_1 = 0$ gehörende Äquivalenzklasse $M_1 = \{i_1, \dots, i_l\}$ mit $i_1 = 0$ betrachtet. Die Äquivalenzklasse, die die 0 enthält, besitzt die Form $\{0, d, 2d, \dots\}$ mit einer ganzzahligen positiven Zahl d . Um M_1 zu ermitteln, wird die Erreichbarkeitsmatrix $R = (r_{ij})_{0 \leq i, j \leq b-1}$ der $Q^{(n)}$ -Übergangsmatrizen für $n = 1, \dots, b-1$ und deren zugehörige gerichtete Graphen bestimmt

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow \exists n \in \{1, \dots, b-1\} & : \quad q_{ij}^n > 0, \\ 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Grenzverteilung der in der Klasse M_1 startenden Markovkette Z^* ist die invariante Verteilung für Q_1 . Da Q_1 doppelt stochastisch ist, wird diese Verteilung durch einen konstanten Vektor, also $(i_1/l, \dots, i_l/l)$ charakterisiert. Im nächsten Schritt wird Z^* als eingebettete Sprungkette eines zeitkontinuierlichen Prozesses fungieren, von dem sich herausstellen wird, dass er ebenfalls $(i_1/l, \dots, i_l/l)$ als Grenzverteilung besitzt.

Sei nun T_n^* der Ankunftszeitpunkt der n -ten Gruppe von Aufträgen. T_n^* genügt der Rekursion

$$T_n^* = I_n + T_{n-1}^*, n \in \mathbb{N}, \quad \text{mit} \quad T_0^* = 0,$$

wobei I_n die Zwischenankunftszeit zwischen der n -ten und $(n-1)$ -ten Gruppe beschreibt. Das Tupel $(Z^*, T^*) = (Z_n^*, T_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein Markovscher Erneuerungsprozess.

Für eine kontinuierliche Beobachtung des $G^X/G^{(b,b)}/c$ -Warteschlangensystems genügt es nicht, den Prozess Z^* zu betrachten. Es muss der zeitstetige regenerative Prozess $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ mit

$$Z_t = Z_n^* \quad \text{für } T_n^* \leq t < T_{n+1}^* \text{ und } t \in \mathbb{R}_0^+$$

betrachtet werden, der die gleiche Grenzverteilung wie Z^* aufweist, da die Zwischenankunftszeiten I_n nicht vom aktuellen Zustand Z_n^* der eingebetteten Sprungkette abhängen. Abbildung 3.6 verdeutlicht den Zusammenhang zwischen den Prozessen Z^* und $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ bezüglich der Grenzverteilung.

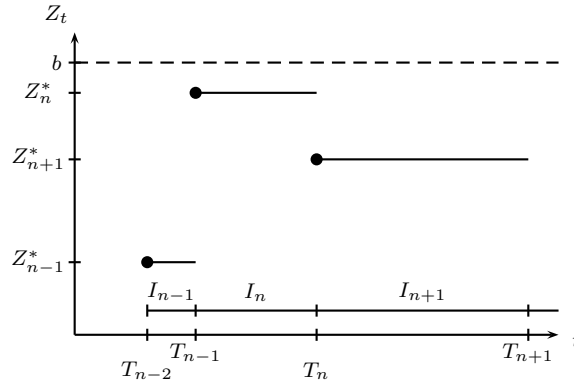


Abbildung 3.6: Zusammenhang zwischen Z_t und Z_n^*

Es folgt:

$$E[Z_\infty] = \lim_{t \rightarrow \infty} E[Z_t] = \frac{i_1 + i_2 + \dots + i_l}{l}.$$

Existiert nur eine Äquivalenzklasse mit $M_1 = E$, so gilt

$$E[Z_\infty] = \frac{\sum_{i=0}^{b-1} i}{b} = \frac{b(b-1)}{2b} = \frac{b-1}{2}. \quad (3.18)$$

Der Term (3.18) stellt für die mittlere Anzahl Aufträge im Batching-Bereich eine obere Schranke dar. Im Fall mehrerer Äquivalenzklassen repräsentiert (3.18) weiterhin eine obere Schranke.

Das folgende Beispiel soll die zuvor erläuterten Schritte der Beschreibung des stochastischen Prozesses zur Bestimmung der mittleren Anzahl Aufträge im Batching-Bereich veranschaulichen.

Seien

$$\begin{array}{ll} b = 6 & \text{Losgröße,} \\ P(X = 2) = \frac{1}{3}, P(X = 10) = \frac{2}{3} & \text{Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen der} \\ & \text{Gruppen der Größe } X_n. \end{array}$$

Die homogene Markov-Kette Z^* hat den Zustandsraum $E = \{0, 1, \dots, 5\}$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten berechnen sich durch $q_i = P(X = i \bmod b)$ und sind für das Beispiel:

$$\begin{aligned} q_0 &= P(X = 0 \bmod 6) = 0 \\ q_1 &= P(X = 1 \bmod 6) = 0 \\ q_2 &= P(X = 2 \bmod 6) = \frac{1}{3} \\ q_3 &= P(X = 3 \bmod 6) = 0 \\ q_4 &= P(X = 4 \bmod 6) = \frac{2}{3} = P(X = 10 \bmod 6) \\ q_5 &= P(X = 5 \bmod 6) = 0. \end{aligned}$$

Die Übergangsmatrix Q ist dann entsprechend gegeben durch

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Im nächsten Schritt werden die n -Schritt-Übergangsmatrizen Q^n mit $n = 1, 2, \dots, 5$ bestimmt, wobei $Q^1 = Q$ ist.

$$Q^2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

$$Q^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$Q^4 = \begin{pmatrix} \frac{8}{27} & 0 & \frac{11}{27} & 0 & \frac{8}{27} & 0 \\ 0 & \frac{8}{27} & 0 & \frac{11}{27} & 0 & \frac{8}{27} \\ \frac{8}{27} & 0 & \frac{8}{27} & 0 & \frac{11}{27} & 0 \\ 0 & \frac{8}{27} & 0 & \frac{8}{27} & 0 & \frac{11}{27} \\ \frac{11}{27} & 0 & \frac{8}{27} & 0 & \frac{8}{27} & 0 \\ 0 & \frac{11}{27} & 0 & \frac{8}{27} & 0 & \frac{8}{27} \end{pmatrix}$$

$$Q^5 = \begin{pmatrix} \frac{10}{27} & 0 & \frac{8}{27} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{10}{27} & 0 & \frac{8}{27} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{10}{27} & 0 & \frac{8}{27} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{10}{27} & 0 & \frac{8}{27} \\ \frac{8}{27} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{10}{27} & 0 \\ 0 & \frac{8}{27} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{10}{27} \end{pmatrix}$$

Zur Bestimmung der Anzahl der Äquivalenzklassen werden die Zeilen und Spalten der Übergangsmatrix Q so vertauscht, so dass Q eine Block-Diagonal-Form annimmt. Beispielsweise können zunächst die 3., 5. und 6. Spalte an die Spaltenpositionen 1, 2 und 3 und die Spalten 1, 2 und 4 auf die Spaltenpositionen 4, 5 und 6 verschoben werden. Dann wird die 2. mit der 5. Zeile und anschließend die 3. mit der 4. Spalte vertauscht. Die Matrix Q' besitzt die Form

$$Q' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix Q' zwei Blockmatrizen beinhaltet, existieren also zwei Äquivalenzklassen. Dies ist leicht einsehbar, wenn die Matrix Q als Graph mit gerichteten Kanten dargestellt wird.

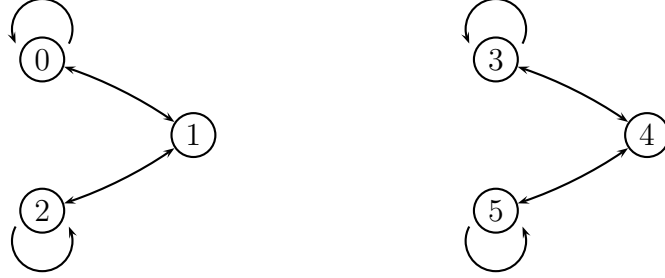


Abbildung 3.7: Graph zur Übergangsmatrix Q'

Die zwei zu Q' gehörenden Äquivalenzklassen werden in Abbildung 3.7 wiedergegeben. Im letzten Schritt wird die Äquivalenzklasse $M_1 = \{i_1, i_2, i_3\}$ bestimmt. Dazu wird die Erreichbarkeitsmatrix R ermittelt, welche die Form

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat. In diesem Beispiel genügt es, die Matrix Q zu untersuchen, da sich die Struktur der n -Schritt-Übergangsmatrizen Q^n , $n = 2, \dots, b-1$, nicht verändert (Homogenität).

Die Berechnung mittels Hardamard-Produkt von $R \times R^T$ ergibt in dem Beispiel wieder R . Die erste Zeile beziehungsweise Spalte der Erreichbarkeitsmatrix R besitzt von Null verschiedene Einträge auf den Positionen 0, 2 und 4. Also ist $M_1 = \{0, 2, 4\}$ und für den Prozess der mittleren Anzahl Aufträge im Batching-Bereich resultiert

$$E[Z_\infty] = \lim_{t \rightarrow \infty} E[Z_t] = \frac{0 + 2 + 4}{3} = 2 \leq \frac{b-1}{2} = 2.5.$$

Modifikation für den Rest-Bereich

Im zweiten Schritt wird die Anzahl Aufträge im Rest-Bereich bezogen auf die fertigen Lose ermittelt. Da der Rest-Bereich ein $G/G/c$ -Warteschlangensystem imitieren soll, ist es notwendig den quadrierten Variationskoeffizienten der Zwischenankunftszeiten der in den Rest-Bereich eintretenden Lose, $SCV[I^*]$, zu ermitteln.

Sei $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ der Zählprozess, der die Anzahl der eintretenden Gruppen in

den Rest-Bereich im Zeitintervall $[0, t]$ zählt. Die eintretenden Gruppen wurden zuvor im Batching-Bereich neu zusammengestellt. Um die Maßzahlen Erwartungswert und Varianz des Zählprozesses zu bestimmen, wird der Satz über das asymptotische Verhalten von Erneuerungsprozessen (Satz 2, Seite 16) genutzt.

N_t ist asymptotisch normalverteilt und besitzt den Erwartungswert

$$E[N_t] = \frac{t}{E[I]} = \lambda t \quad (3.19)$$

und die Varianz

$$Var[N_t] = \frac{Var[I]}{(E[I])^3} t = \frac{1}{E[I]} \cdot \frac{Var[I]}{E[I]^2} t = \lambda SCV[I] t. \quad (3.20)$$

Damit ist der stochastische Prozess $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ für unsere Zwecke hinreichend beschrieben. Im nächsten Schritt wird die tatsächliche Anzahl der Aufträge im Rest-Bereich ermittelt, da der Zählprozess $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ nur die Anzahl der eintretenden Gruppen bestimmt.

Sei $(N_t^\Sigma)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ die Summe aller eingetroffenen Aufträge im Zeitintervall $[0, t]$ mit

$$N_t^\Sigma = \sum_{i=1}^{N_t} X_i,$$

wobei X_i die ursprüngliche Eingangsgruppengröße angibt. Der Erwartungswert und die Varianz des Zählprozesses $(N_t^\Sigma)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ werden mit Hilfe der Wald'schen Gleichung (Satz 3, Seite 31) berechnet.

Für den Zählprozess $(N_t^\Sigma)_{t \in \mathbb{R}^+}$ gilt also mit den Gleichungen (3.19) und (3.20)

$$E[N_t^\Sigma] = E[N_t] \cdot E[X] = \lambda t E[X] \quad (3.21)$$

und

$$\begin{aligned} Var[N_t^\Sigma] &= E[N_t] \cdot Var[X] + Var[N_t] \cdot (E[X])^2 \\ &= \lambda t \cdot Var[X] + \lambda SCV[I] t \cdot (E[X])^2 \\ &= \lambda t (Var[X] + SCV[I] \cdot (E[X])^2) \\ &= \lambda t \left(\frac{Var[X] \cdot (E[X])^2}{(E[X])^2} + SCV[I] \cdot (E[X])^2 \right) \\ &= \lambda t (E[X])^2 \left(\frac{Var[X]}{(E[X])^2} + SCV[I] \right) \\ &= \lambda t (E[X])^2 (SCV[X] + SCV[I]). \end{aligned} \quad (3.22)$$

So wie der Zählprozess $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ benötigt wurde, um den Zählprozess $(N_t^\Sigma)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ zu beschreiben, wird $(N_t^\Sigma)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ benötigt, um die Maßzahlen des Zählprozesses $(N_t^*)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ zu ermitteln. $(N_t^*)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ charakterisiert die Anzahl der eintretenden Lose der Größe b in den Rest-Bereich.

Zunächst wird zur Bestimmung der Maßzahlen für den Zählprozess $(N_t^*)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ der Satz über das asymptotische Verhalten von Erneuerungsprozessen verwendet. Für die Zwischenankunftszeiten der Lose $(I_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ gelten die gleichen Annahmen wie für die Zwischenankunftszeiten der Gruppen $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezogen auf das gesamte Warteschlangensystem. Der Erwartungswert der i. i. d. Folge $(I_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ ist positiv und existiert ($0 < E[I^*] < \infty$). Die Ankunftsrate ergibt sich aus $\lambda^* = 1/E[I^*]$ und der quadrierte Variationskoeffizient ist endlich, $SCV[I^*] < \infty$. Für den Erwartungswert und die Varianz resultiert für den Zählprozess $(N_t^*)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ mit Hilfe des Satzes 2

$$E[N_t^*] = \lambda^* t \quad (3.23)$$

und

$$Var[N_t^*] = \lambda^* SCV[I^*] t. \quad (3.24)$$

Jedoch sind die Ankunftsrate λ^* und der quadrierte Variationskoeffizient $SCV[I^*]$ der Lose im Rest-Bereich nicht bekannt. Der Erwartungswert und die Varianz des Prozesses $(N_t^*)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ lassen sich approximativ mit Hilfe von (3.21) und (3.22) beschreiben, indem der Erwartungswert und die Varianz des Prozesses N_t^Σ ins Verhältnis zur Losgröße b gesetzt werden

$$E[N_t^*] \approx E\left[\frac{1}{b} N_t^\Sigma\right] = \frac{1}{b} E[N_t^\Sigma] = \frac{1}{b} \cdot \lambda t E[X] = \lambda t \frac{E[X]}{b} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} Var[N_t^*] &\approx Var\left[\frac{1}{b} N_t^\Sigma\right] = \frac{1}{b^2} Var[N_t^\Sigma] \\ &= \frac{1}{b^2} \lambda t (E[X])^2 (SCV[X] + SCV[I]) \\ &= \left(\frac{E[X]}{b}\right)^2 \cdot \lambda t (SCV[X] + SCV[I]). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Werden nun die Gleichungen (3.23) und (3.25) gleichgesetzt und nach λ^* aufgelöst, kann λ^* approximativ bestimmt werden

$$\lambda^* \approx \lambda \frac{E[X]}{b}. \quad (3.27)$$

Um den quadrierten Variationskoeffizienten $SCV[I^*]$ zu erhalten, werden nun die Gleichungen (3.24) und (3.26) gleichgesetzt und nach $SCV[I^*]$ aufgelöst

$$\begin{aligned}\lambda^* SCV[I^*]t &\approx \left(\frac{E[X]}{b}\right)^2 \lambda t(SCV[X] - SCV[I]) \\ \lambda \frac{E[X]}{b} SCV[I^*]t &\stackrel{(3.27)}{\approx} \left(\frac{E[X]}{b}\right)^2 \lambda t(SCV[X] - SCV[I]) \\ SCV[I^*] &\approx \frac{E[X]}{b} (SCV[X] + SCV[I]).\end{aligned}\quad (3.28)$$

Die Auslastung ρ^* des gesamten Warteschlangensystems bezogen auf Lose berechnet sich gemäß

$$\rho^* = \frac{\lambda^*}{c\mu} \approx \lambda \frac{E[X]E[S]}{bc}. \quad (3.29)$$

$E[N_q]_{G/G/c}(\rho^*, SCV[I^*], SCV[S])$ beschreibt die mittlere Anzahl Aufträge in der Warteschlange des Rest-Bereichs und beinhaltet die zuvor erläuterten Modifikationen. Da die Lose nun jedoch als einzelne Aufträge im Rest-Bereich behandelt werden, muss $E[N_q]_{G/G/c}(\rho^*, SCV[I^*], SCV[S])$ noch mit der Losgröße b multipliziert werden, um die tatsächliche Anzahl Aufträge darzustellen

$$b \cdot E[N_q]_{G/G/c}(\rho^*, SCV[I^*], SCV[S]) \approx b \cdot \frac{\rho \cdot C(c, \rho^*)}{1 - \rho^*} \left(\frac{SCV[I^*] + SCV[S]}{2} \right) \cdot k_{KLB}$$

mit

$$k_{KLB} \approx \begin{cases} \exp\left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{1-\rho^*}{C(c, \rho^*)} \cdot \frac{(1-SCV[I^*])^2}{SCV[I^*] + SCV[S]}\right) & , \text{ für } SCV[I^*] \leq 1 \\ \exp\left(-(1-\rho^*) \frac{SCV[I^*]-1}{SCV[I^*] + 4SCV[S]}\right) & , \text{ für } SCV[I^*] > 1. \end{cases}$$

Die mittlere Anzahl Lose, welche sich in Bedienung des Rest-Bereichs befinden, werden ebenfalls mit der Losgröße multipliziert. Anschließend wird der Term zu $E[N_q]_{G/G/c}(\rho^*, SCV[I^*], SCV[S])$ hinzu addiert und wir erhalten approximativ für die mittlere Anzahl Aufträge im Rest-Bereich

$$E[N_q] \approx b \cdot E[N_q]_{GI/GI/c}(\rho^*, SCV[I^*], SCV[S]) + bc\rho^*. \quad (3.30)$$

Korrekturterm $E[Y_\infty]$

Es besteht die Notwendigkeit einen Korrekturterm für die Ermittlung der mittleren Anzahl Aufträge im Rest-Bereich eines $G^X/G^{(b,b)}/c$ -Warteschlangensystem einzuführen. Sind zum Beispiel die Zwischenankunfts- und Bedienzeiten konstant, was einem $D^X/D^{(b,b)}/c$ -System entspricht, gelten für die

Varianzen $Var[I^*] = Var[S] = 0$. Daraus folgt, dass $SCV[I^*] = SCV[S] = 0$ ist, so dass sich wegen

$$E[N_q] \approx b \cdot \frac{\rho^* \cdot C(c, \rho^*)}{1 - \rho^*} \left(\frac{SCV[I^*] + SCV[S]}{2} \right) \cdot k_{KLB} \quad (3.31)$$

keine Aufträge in der Warteschlange des Rest-Bereichs befinden. Das stimmt jedoch für den Fall $E[X] > bc$ nicht. Ist die mittlere Eingangsgruppengröße größer als bc , befinden sich Lose der Größe b in der Warteschlange da die Bediener nicht alle eingehenden Lose gleichzeitig bearbeiten können.

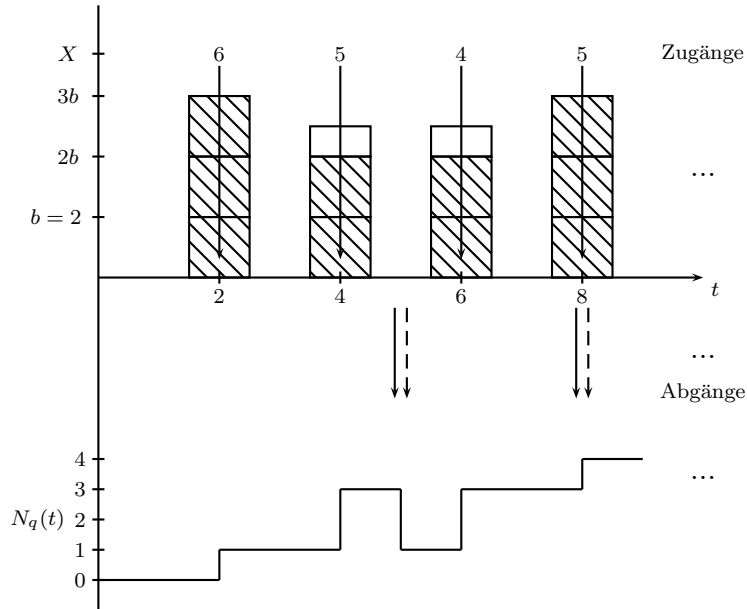


Abbildung 3.8: Anzahl Lose im $D^X/D^{(2,2)}/2$ -System im zeitlichen Verlauf

Abbildung 3.8 verdeutlicht die Ungenauigkeit der Approximationsformel (3.31) für das $D^X/D^{(2,2)}/2$ -System mit konstanten Zwischenankunftszeiten $E[I] = 2$ und konstanten Bedienzeiten $E[S] = 3$. Die mittlere Eingangsgruppengröße beträgt $E[X] = 5$ und die Losgröße besitzt den Wert $b = 2$. Es ist also $E[X] > b \cdot c$. In der Abbildung 3.8 ist erkennbar, dass die Anzahl Aufträge in der Warteschlange zum Zeitpunkt $t = 2$ nicht mehr 0 ist. Es baut sich im zeitlichen Verlauf eine Warteschlange auf im Widerspruch zu Formel (3.31).

Für die folgende Argumentation sei $X_n/bc \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt. Außerdem sei vereinbart, dass alle c Bediener mit der Bearbeitung der Lose gleichzeitig beginnen, sowie dass die Bearbeitung der Lose zum gleichen Zeitpunkt endet. Nach dem Eintreffen der Eingangsgruppen der Größe X_n werden zunächst X_n/bc -Lose erzeugt und nacheinander an die Bedienstation weitergeleitet. Die Lose, die sich nicht in Bedienung befinden, warten in der Warteschlange.

Sei $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ der stochastische Prozess, der die Anzahl der Lose in der Warteschlange im Rest-Bereich zum Zeitpunkt t beschreibt. $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ ist ein regenerativer stochastischer Prozess mit dem Zustandsraum $E = \mathbb{N}_0$.

Ein regenerativer Prozess ist wie folgt definiert:

Definition 1 (Regenerativer stochastischer Prozess)

Ein stochastischer Prozess $Z = (\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t \in T})$ mit Werten in einem Messraum (E, \mathcal{E}) heißt regenerativer stochastischer Prozess, falls es einen Erneuerungsprozess $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit den Lebensdauern Y_1, Y_2, \dots gibt, so dass folgende Bedingungen

- i) $\forall n \in \mathbb{N}_0$ sind $((Z_{t+S_n})_{t \in T}, (Y_k)_{k > n})$ und $((Z_t)_{t \in T \cap [0, S_n)}, S_0, S_1, \dots, S_n)$ stochastisch unabhängig und*
- ii) die Prozesse $((Z_{t+S_n})_{t \in T}, (Y_k)_{k > n})$ besitzen die gleiche Verteilung mit $n \in \mathbb{N}_0$*

erfüllt sind.

Der Prozess (Y_t) besitzt die Regenerationszeitpunkte

$$T_n^* = \sum_{i=1}^n I_i \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Das Grenzverhalten des regenerativen stochastischen Prozesses $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ lässt sich mit Hilfe von Satz 4 und Satz 5 bestimmen. Satz 4 gibt an, dass das langfristige zeitliche Mittel regenerativer Prozesse unter leichten Voraussetzungen existiert.

Satz 4

Sei $Z = (\Omega, \mathcal{F}, P, (Z_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+})$ ein messbarer regenerativer Prozess mit dem zugehörigen Zustandsraum (E, \mathcal{E}) sowie $f : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine messbare Funktion. Weiter sei $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein eingebetteter Erneuerungsprozess. Sei $E[S_1] < \infty$ von S_1 und

$$E \left[\int_0^{S_1} f(Z_s) ds \right] < \infty.$$

Dann gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(Z_s) ds = \frac{E \left[\int_0^{S_1} f(Z_s) ds \right]}{E[S_1]} \quad P\text{-f.s.}$$

Der folgende Satz erläutert dann, dass ein regenerativer stochastischer Prozess mit einem eingebettetem Erneuerungsprozess unter bestimmten Voraussetzungen ein Grensverhalten besitzt.

Satz 5 (Grensverhalten)

Es sei Z ein zeitstetiger regenerativer stochastischer Prozess mit Zustandsraum (E, \mathcal{E}) und eingebettetem Erneuerungsprozess $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ist S_1 nicht arithmetisch verteilt mit Erwartungswert $E[S_1] < \infty$ und sind die Abbildungen $t \mapsto P(Z_t \in A, S_1 > t)$ uneigentlich Riemann-integrierbar, dann gilt

$$Z_t \xrightarrow{d} Z^*.$$

Existiert zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 5 noch $E[Z^*]$ für eine messbare Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, so existiert auch das langfristige Zeitmittel aus Satz 4 und es gilt die Formel „Zeitmittel gleich Raummittel“. Das heißt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Z_s ds = \lim_{t \rightarrow \infty} E[Z_t] = E[Z^*]. \quad (3.32)$$

Für den Warteschlangenprozess $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ folgt mit f als Identität

$$\begin{aligned} E[Y_\infty] &= \lim_{t \rightarrow \infty} E[Y_t] = E \left[\int_0^{I_1} Y_s ds \right] \frac{1}{E[I_1]} \\ &= E \left[\sum_{i=1}^{(X_n/(bc)) - 1} ibcS_i \right] \frac{1}{E[I]} \\ &= E \left[bc \sum_{i=1}^{(X_n/(bc)) - 1} i \right] \frac{E[S_1]}{E[I]} \\ &= E \left[\frac{X^2}{bc} - X \right] \frac{1}{2} \frac{E[S]}{E[I]} \\ &= \left(\frac{E[X^2]}{bc} - E[X] \right) \frac{1}{2} \frac{E[S]}{E[I]} \\ &= \left(\frac{E[X^2]}{E[X]} - bc \right) \frac{1}{2} \frac{\lambda E[X]}{bc} E[S] \\ &= \left(\frac{E[X^2]}{E[X]} - bc \right) \frac{\rho^*}{2}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Mit diesem Term kann die Genauigkeit der Formel (3.30) im Fall $(E[X^2]/E[X] - bc) > 0$ deutlich verbessert werden. Das obige Ergebnis wird auch im Fall $X_n/bc \in \mathbb{R}^+$ angewendet. Die mittlere Anzahl Aufträge für das gesamte $G^X/G^{(b,b)}/c$ -Warteschlangensystem resultiert entsprechend aus

$$E[N] \approx \begin{cases} E[Z_\infty] + b \cdot E[N_q]_{G/G/c}(\rho^*, SCV[I^*], SCV[S]) + bc\rho^* + E[Y_\infty], & \left(\frac{E[X^2]}{E[X]} - bc\right) > 0 \\ E[Z_\infty] + b \cdot E[N_q]_{G/G/c}(\rho^*, SCV[I^*], SCV[S]) + bc\rho^*, & \left(\frac{E[X^2]}{E[X]} - bc\right) \leq 0. \end{cases}$$

Zu bemerken ist noch, dass die Formel im Fall $G^X/M/1$ exakt ist.

3.3 Das $G^X/G^{(b,b)}/c$ -Warteschlangensystem im Mehr-Produktfall

3.3.1 Modellbeschreibung

Das zuvor betrachtete $G^X/G^{(b,b)}/c$ -Warteschlangensystem kann um $k = 1, 2, \dots, K$ unterschiedliche Produktklassen mit unterschiedlichen Eingangsgruppengrößen erweitert werden. Die Zwischenankunfts- und Bedienzeiten sind beliebig verteilt und voneinander unabhängig. Zudem besitzt jede Produktklasse eigene spezifische Zwischenankunfts- und Bedienzeiten. Es wird die Annahme getroffen, dass die i. i. d. Folgen $(I_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(S_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ zwischen den Produktklassen paarweise stochastisch unabhängig sind. Die Aufträge einer Produktklasse k treten in Gruppen in das Warteschlangensystem ein und werden durch Produktklassen-spezifische Zufallsvariablen $X^{(k)}$ beschrieben. Eine Zufallsvariable $X^{(k)}$ ist positiv und ganzzahlig. Für $X^{(k)}$ wird ebenfalls vorausgesetzt, dass die Eingangsgruppengrößen unterschiedlicher Produktklassen paarweise stochastisch unabhängig sind. Für jede Produktklasse ist eine individuelle Bedienregel hinterlegt, welche die Batchgröße $b^{(k)}$ reguliert. Wurde ein Los der Größe $b^{(k)}$ erzeugt, kann dieses von einem der c identischen und parallel arbeitenden Bedienern behandelt werden. Es wird festgelegt, dass alle Bediener Lose aller Produktklassen verarbeiten können. Ist die notwendige Batchgröße nicht erreicht, müssen die Aufträge vom Typ k warten, bis ausreichend viele Aufträge gleichen Typs in das Warteschlangensystem eingetreten sind, um ein Los zu erzeugen. Das Mischen von Aufträgen unterschiedlichen Typs innerhalb eines Loses ist nicht zulässig. Erst nach einer erfolgreichen Generierung eines Loses kann eine Bedienung durch einen Bediener erfolgen. Sind alle Bediener aktiv, reihen sich die generierten Lose in die Warteschlange ein. Die Lose werden von den Bedienern nach dem *FCFS*-Prinzip aus der Warteschlange ausgewählt. Ein vollständig bearbeitetes Los verlässt anschließend das Warteschlangensystem.

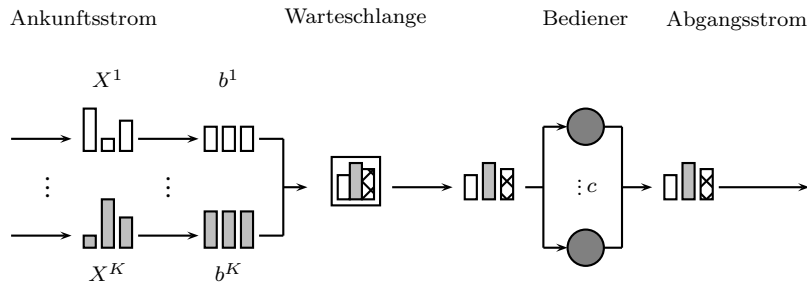


Abbildung 3.9: Modell eines Warteschlangensystems mit Gruppenankünften und -bedienung im Mehr-Produktfall

3.3.2 Approximationsformel von Allen und Cunneen [2007]

In [Grö07] wurde die Formel von Allen und Cunneen für Warteschlangensysteme mit Gruppenankünften und -bedienung im Mehr-Produktfall entwickelt. Dazu wurde die Grundidee, welche in [Han06] erläutert wird, aufgegriffen. Die Struktur des zu untersuchenden Warteschlangensystems besteht aus einem Batching- und einem Rest-Bereich. Im Batching-Bereich werden die Aufträge, welche unterschiedlichen Produktklassen angehören, zu Loses zusammengestellt. Die Lose sind sortenrein und werden in den Rest-Bereich weitergeleitet. Der Rest-Bereich imitiert das Arbeitsprinzip eines $G/G/c$ -Warteschlangensystems.

Die Schwierigkeit die Formel von Allen und Cunneen auf ein $G^X/G^{(b,b)}/c$ -Warteschlangensystem im Mehr-Produktfall anzuwenden besteht in der Modifikation der Produktklassen-abhängigen Parameter. Die Modifikation umfasst die Maße der Zwischenankunfts- und Bedienzeiten, die Auslastung und die Batchgrößen. Die allgemeine Idee der Modifikation ist, dass die gemittelten Maße durch das Verhältnis der Ankunftsrate einer Produktklasse k zur Gesamtankunftsrate λ^Σ gewichtet werden.

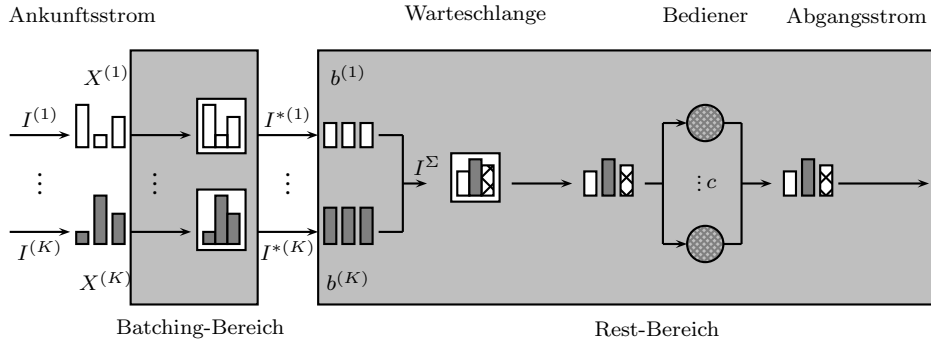


Abbildung 3.10: Modell eines Warteschlangensystems mit Gruppenankünften und -bedienung im Mehr-Produktfall

Im Folgenden wird die Herleitung des stochastischen Prozesses $(Z_t^\Sigma)_{t \in \mathbb{R}^+}$ kurz beschrieben. Anschließend werden die gemittelten Maße Gesamtankunftsrate λ^Σ , Gesamtauslastung ρ^Σ , mittlere Losgröße b^Σ , sowie die quadrierten Variationskoeffizienten der mittleren Bedienzeiten $SCV[S^\Sigma]$ und der Zwischenankunftszeit der Lose $SCV[I^\Sigma]$ hergeleitet.

Herleitung des stochastischen Prozesses zur Beschreibung der Anzahl Aufträge im Batching-Bereich

Da die Zwischenankunftszeiten unterschiedlicher Produktklassen als paarweise stochastisch unabhängig angenommen werden, sind die Vorgänge der Batch-Erzeugungen der unterschiedlichen Produktklassen ebenfalls paarweise stochastisch unabhängig. Der stochastische Prozess $Z_t^{(k)}$ beschreibt die Anzahl von Aufträgen des Typs k zum Zeitpunkt t im Batching-Bereich des Warteschlangensystems und lässt sich analog zum Abschnitt 3.2.3 für jede Produktklasse k berechnen

$$E[Z_\infty^{(k)}] = \lim_{t \rightarrow \infty} E[Z_t^{(k)}] = \frac{(i_1^{(k)} + i_2^{(k)} + \dots + i_l^{(k)})}{l}. \quad (3.34)$$

Sollte nur eine Äquivalenzklasse existieren, also $M_1^{(k)} = E^{(k)}$, dann gilt

$$E[Z_\infty^{(k)}] = \frac{\sum_{i=0}^{b^{(k)}-1} i}{b^{(k)}} = \frac{b^{(k)}(b^{(k)} - 1)}{2b^{(k)}} = \frac{b^{(k)} - 1}{2}. \quad (3.35)$$

Bei mehr als einer Äquivalenzklasse gilt in (3.35) keine Gleichheit mehr, aber immer noch $(b^{(k)} - d)/2 \leq (b^{(k)} - 1)/2$. $(b^{(k)} - 1)/2$ charakterisiert eine obere Schranke.

Da sich der Prozess $Z_t^{(k)}$ für jede Produktklasse k beschreiben lässt, resultiert die Gesamtanzahl Aufträge im Batching-Bereich durch

$$E[Z_\infty^\Sigma] = \sum_{k=1}^K E[Z_\infty^{(k)}]. \quad (3.36)$$

Ein Beispiel, das zwei Produktklassen verwendet, soll das Vorgehen verdeutlichen. Seien für die Produktklasse 1 wie in Abschnitt 3.2.3

$$\begin{array}{ll} b^{(1)} = 6 & \text{Losgröße,} \\ P(X^{(1)} = 2) = \frac{1}{3}, & \text{Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen} \\ P(X^{(1)} = 10) = \frac{2}{3} & \text{der Gruppen der Größe } X_n^{(1)} \end{array}$$

und für die Produktklasse 2

$$\begin{aligned}
b^{(2)} &= 3 && \text{Losgröße,} \\
P(X^{(2)} = 3) &= \frac{1}{6}, && \text{Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen} \\
P(X^{(2)} = 1) &= \frac{1}{3}, && \text{der Gruppen der Größe } X_n^{(2)} \\
P(X^{(2)} = 2) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

gegeben. Die mittlere Anzahl Aufträge der ersten Produktklasse im Batching-Bereich wurde bereits ermittelt

$$E[Z_\infty^{(1)}] = \lim_{t \rightarrow \infty} E[Z_t^{(1)}] = 2.$$

Für die zweite Produktklasse besitzt die homogene Markov-Kette $Z^{*(2)}$ den Zustandsraum $E^{(2)} = \{0, 1, 2\}$ und die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned}
{}^{(2)}q_0 &= P(X^{(2)} = 0 \mod 3) = \frac{1}{6} = P(X^{(2)} = 3 \mod 3) \\
{}^{(2)}q_1 &= P(X^{(2)} = 1 \mod 3) = \frac{1}{3} \\
{}^{(2)}q_2 &= P(X^{(2)} = 2 \mod 3) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Die Übergangsmatrix ${}^{(2)}Q$ hat somit die Form

$${}^{(2)}Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

und bildet gleichzeitig Matrix ${}^{(2)}Q'$ mit einer Block-Diagonal-Form. Am zugehörigen Graphen, der die Übergänge abbildet, ist bereits erkennbar, dass nur eine Äquivalenzklasse vorliegt.

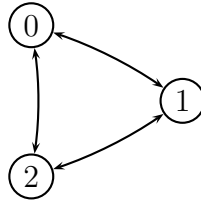


Abbildung 3.11: Graph zur Übergangsmatrix ${}^{(2)}Q$

Die 2-Schritt-Übergangsmatrix ist durch

$${}^{(2)}Q^2 = \begin{pmatrix} \frac{13}{36} & \frac{13}{36} & \frac{10}{36} \\ \frac{10}{36} & \frac{13}{36} & \frac{13}{36} \\ \frac{13}{36} & \frac{10}{36} & \frac{13}{36} \end{pmatrix}$$

gegeben. Auf die Bestimmung der Erreichbarkeitsmatrix R kann verzichtet werden, da klar ist, dass nur eine Äquivalenzklasse existiert. Es wird die entsprechende Formel für den Sonderfall (3.35) verwendet

$$E[Z_\infty^{(2)}] = \frac{3-1}{2} = 1.$$

Modifikationen für den Rest-Bereich

Im zweiten Schritt werden die Modifikationen für den Rest-Bereich vorgenommen. Es folgen die Herleitungen der auf den Gesamtprozess, das heißt auf den Produktklassen-unabhängigen Prozess, bezogenen Maße des Rest-Bereichs λ^Σ , $SCV[I^\Sigma]$, $SCV[S^\Sigma]$, ρ^Σ und b^Σ . Zunächst wird die Gesamtankunftsrate aller Produktklassen λ^Σ beschrieben. Sei

$$\lambda^{*(k)} = \frac{1}{E[I^{*(k)}]}$$

die Ankunftsrate der Lose der Produktklasse $k = \{1, 2, \dots, K\}$ in den Rest-Bereich. Da die Zwischenankunftszeiten der Auftragsgruppen $(I_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ als paarweise stochastisch unabhängig vorausgesetzt werden, gilt diese Eigenschaft auch für die Los-Zwischenankunftszeiten $(I_n^{*(k)})_{n \in \mathbb{N}}$. Mit (3.27) aus Abschnitt 3.2.3 ergibt sich

$$\lambda^{*(k)} \approx \lambda^{(k)} \frac{E[X^{(k)}]}{b^{(k)}} \quad (3.37)$$

und die Gesamtankunftsrate ergibt sich durch Aufsummierung

$$\lambda^\Sigma = \sum_{k=1}^K \lambda^{*(k)}.$$

Die mittlere Losgröße b^Σ beschreibt die durchschnittliche Größe der Lose, die pro Zeiteinheit in den Rest-Bereich eintreten. Da die Ankunftsrate der Lose verschiedener Produktklassen unterschiedlich ausfallen können, wird eine Gewichtung vorgenommen. Die Losgröße $b^{(k)}$ wird durch die zugehörige Ankunftsrate $\lambda^{*(k)}$ ins Verhältnis zur Gesamtankunftsrate der Lose λ^Σ gesetzt

$$b^\Sigma = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda^{*(k)}}{\lambda^\Sigma} b^{(k)}.$$

Um die mittleren Bedienzeiten für die verschiedenen Produktklassen zu beschreiben, wird eine i. i. d. Folge von Zufallsvariablen $(S_n^\Sigma)_{n \in \mathbb{N}}$ eingeführt.

Aufgrund der paarweisen stochastischen Unabhängigkeit der Bedienzeiten der verschiedenen Produktklassen kann analog wie zuvor bei der Bestimmung der mittleren Losgröße vorgegangen werden

$$S_n^\Sigma = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda^{*(k)}}{\lambda^\Sigma} S_n^{(k)}.$$

Da in der Approximationsformel von Allen und Cunneen der quadrierte Variationskoeffizient benötigt wird, werden die ersten zwei Momente der Folge $(S_n^\Sigma)_{n \in \mathbb{N}}$ aufgestellt. Das erste Moment berechnet sich durch

$$E[S^\Sigma] = E \left[\sum_{k=1}^K \frac{\lambda^{*(k)}}{\lambda^\Sigma} S^{(k)} \right]. \quad (3.38)$$

Die Bedienzeiten $S_n^{(k)}$ zwischen den einzelnen Produktklassen k sind paarweise stochastisch unabhängig. Der Ausdruck (3.38) kann umgeschrieben werden in

$$E[S^\Sigma] = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda^{*(k)}}{\lambda^\Sigma} E[S^{(k)}].$$

Das zweite Moment berechnet sich durch

$$E[(S^\Sigma)^2] = E \left[\sum_{k=1}^K \frac{\lambda^{*(k)}}{\lambda^\Sigma} (S^{(k)})^2 \right]$$

und kann wieder aufgrund der Annahme der paarweise stochastischen Unabhängigkeit umformuliert werden in

$$E[(S^\Sigma)^2] = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda^{*(k)}}{\lambda^\Sigma} E[(S^{(k)})^2].$$

Mit Hilfe des Verschiebungssatzes für die Varianz ($Var[\cdot] = E[\cdot^2] - E[\cdot]^2 \Leftrightarrow E[\cdot^2] = Var[\cdot] + E[\cdot]^2$) lässt sich der Term überführen in

$$E[(S^\Sigma)^2] = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda^{*(k)}}{\lambda^\Sigma} (Var[S^{(k)}] + E[S^{(k)}]^2).$$

Wird die Gleichung nun mit $1/E[S^{(k)}]^2$ erweitert, lässt sich ein Teil des Terms als quadrierter Variationskoeffizient darstellen

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^K \frac{1}{E[S^{(k)}]^2} E[(S^\Sigma)^2] &= \sum_{k=1}^K \frac{\lambda^{*(k)}}{\lambda^\Sigma} \left(\frac{\text{Var}[(S^{(k)})]}{E[S^{(k)}]^2} + \frac{E[S^{(k)}]^2}{E[S^{(k)}]^2} \right) \\ \sum_{k=1}^K \frac{1}{E[S^{(k)}]^2} E[(S^\Sigma)^2] &= \sum_{k=1}^K \frac{\lambda^{*(k)}}{\lambda^\Sigma} (SCV[S^{(k)}] + 1) \\ E[(S^\Sigma)^2] &= \sum_{k=1}^K \frac{\lambda^{*(k)}}{\lambda^\Sigma} E[S^{(k)}]^2 (SCV[S^{(k)}] + 1).\end{aligned}$$

Über das berechnete erste und zweite Moment für die Folge von Zufallsvariablen $(S_n^\Sigma)_{n \in \mathbb{N}}$ lässt sich nun der quadrierte Variationskoeffizient aufstellen

$$SCV[S^\Sigma] = \frac{E[(S^\Sigma)^2]}{E[S^\Sigma]^2} - 1.$$

In Abschnitt 3.2.3 wurde der stochastische Prozess $(N_t^*)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ beschrieben. Die nun zu untersuchenden Prozesse $(N_t^{(k)})_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ sind zugehörige Zählprozesse von unabhängigen Erneuerungsprozessen und ermitteln die Anzahl der eintretenden Eingangsgruppen einer Produktklasse k in das Warteschlangensystem. Daher lassen sich zunächst die Ergebnisse aus Abschnitt 3.2.3 übertragen. $(N_t^{*(k)})_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ beschreibe die eintretenden Lose der Produktklasse k in den Rest-Bereich. Da es sich um unabhängige Erneuerungsprozesse handelt, kann die Definition für die Überlagerungen von Erneuerungsprozessen verwendet werden.

Definition 2 (Überlagerungsprozesse)

Es seien $(N_t^{(k)})_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ mit $k = 1, \dots, K$ und $K \geq 2$ unabhängige Erneuerungsprozesse. Dann heißt der Prozess $(N_t^\Sigma)_{t \in \mathbb{R}^+}$ mit

$$N_t^\Sigma := \sum_{k=1}^K N_t^{(k)}$$

Überlagerungsprozess der Erneuerungsprozesse $(N_t^{(k)})_{t \in \mathbb{R}_0^+}$.

$(N_t^\Sigma)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ bildet einen Überlagerungsprozess, der die Form

$$N_t^\Sigma = \sum_{k=1}^K N_t^{*(k)}$$

besitzt. Da die Verteilungen der einzelnen Prozesse $(N_t^{*(k)})_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ asymptotisch der Normalverteilung entsprechen, konvergieren die Verteilungen des Überlagerungsprozesses $(N_t^\Sigma)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ gegen eine Faltung von Normalverteilungen, die wieder eine Normalverteilung ist. Die Varianz des Überlagerungsprozesses resultiert durch einfache Aggregation der Parameter

$$\text{Var}[N_t^\Sigma] \approx \lambda^\Sigma \text{SCV}[I^\Sigma]t. \quad (3.39)$$

Aufgrund der Unabhängigkeiten der Prozesse $(N_t^{*(k)})_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ lässt sich die Varianz auch durch

$$\text{Var}[N_t^\Sigma] = \sum_{k=1}^K \text{Var}[N_t^{*(k)}]$$

darstellen. Wird das Ergebnis aus Gleichung (3.24), welches die Varianz des Zählprozesses $(N_t^*)_{t \in \mathbb{R}^+}$ beschreibt, übertragen, kann $\text{Var}[N_t^{*(k)}]$ beschrieben werden durch

$$\text{Var}[N_t^\Sigma] = \sum_{k=1}^K \lambda^{*(k)} \text{SCV}[I^{*(k)}]t.$$

Die ermittelte Varianz $\text{Var}[N_t^\Sigma]$ kann nun in (3.39) eingesetzt werden und $\text{SCV}[I^\Sigma]$ lässt sich approximativ berechnen, da alle anderen Größen bekannt sind

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \lambda^{*(k)} \text{SCV}[I^{*(k)}]t &\approx \lambda^\Sigma \text{SCV}[I^\Sigma]t \\ \text{SCV}[I^\Sigma] &\approx \frac{1}{\lambda^\Sigma t} \sum_{k=1}^K \lambda^{*(k)} \text{SCV}[I^{*(k)}]t \\ &\approx \sum_{k=1}^K \frac{\lambda^{*(k)}}{\lambda^\Sigma} \text{SCV}[I^{*(k)}]. \end{aligned}$$

Der Quotient $\lambda^{*(k)}/\lambda^\Sigma$ führt zu einer Gewichtung. Für den quadrierten Variationskoeffizienten $\text{SCV}[I^{*(k)}]$ wird die Approximation, die in Abschnitt 3.2.3 in (3.28) vorgestellt wurde, verwendet

$$\text{SCV}[I^{*(k)}] \approx \frac{E[X^{(k)}]}{b^{(k)}} (\text{SCV}[X^{(k)}] + \text{SCV}[I^{(k)}]),$$

womit der $\text{SCV}[I^\Sigma]$ vollständig beschrieben ist.

Die Auslastung muss für die Approximationsformel von Allen und Cunneen für $G^{X^{(k)}}/G^{(b^{(k)}, b^{(k)})}/c$ -Warteschlangensysteme entsprechend angepasst werden. In Abschnitt 3.2.3 ist durch Gleichung (3.29) die Bestimmung der Auslastung für die einzelnen Produktklassen k gegeben

$$\rho^{(k)} \approx \lambda^{(k)} \frac{E[X^{(k)}]E[S^{(k)}]}{b^{(k)}c}. \quad (3.40)$$

Die mittlere Auslastung ρ^Σ berechnet sich durch

$$\rho^\Sigma = \frac{E[S^\Sigma]}{cE[I^\Sigma]} = \frac{\lambda^\Sigma E[S^\Sigma]}{c}.$$

Da die mittlere Bedienzeit $E[S^\Sigma]$ und die mittlere Zwischenankunftszeit der Lose $E[I^\Sigma]$ zuvor ermittelt wurden, resultiert

$$\begin{aligned} \rho^\Sigma &= \frac{\lambda^\Sigma \sum_{k=1}^K \frac{\lambda^{*(k)}}{\lambda^\Sigma} E[S^{(k)}]}{c} \\ &= \sum_{k=1}^K \frac{\lambda^{*(k)} E[S^{(k)}]}{c}. \end{aligned}$$

Wird nun $\lambda^{*(k)}$, das in (3.37) berechnet wurde, ersetzt, ergibt sich

$$\rho^\Sigma = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda^{(k)} \frac{E[X^{(k)}]}{b^{(k)}} E[S^{(k)}]}{c} = \sum_{k=1}^K \lambda^{(k)} \frac{E[X^{(k)}]E[S^{(k)}]}{cb^{(k)}}$$

und kann mit (3.40) vereinfacht werden zu

$$\rho^\Sigma = \sum_{k=1}^K \rho^{(k)}.$$

Damit ergibt sich für die mittlere Anzahl Aufträge in der Warteschlange des Rest-Bereichs

$$E[N_q] = \frac{\rho^\Sigma C(c, \rho^\Sigma)}{1 - \rho^\Sigma} b^\Sigma \left(\frac{SCV[I^\Sigma] + SCV[S^\Sigma]}{2} \right) \cdot k_{KLB}$$

mit

$$k_{KLB} \approx \begin{cases} \exp\left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{1-\rho^\Sigma}{C(c, \rho^\Sigma)} \cdot \frac{(1-SCV[I^\Sigma])^2}{SCV[I^\Sigma]+SCV[S^\Sigma]}\right) & , \text{ für } SCV[I^\Sigma] \leq 1 \\ \exp\left(-(1-\rho^\Sigma) \frac{SCV[I^\Sigma]-1}{SCV[I^\Sigma]+4SCV[S^\Sigma]}\right) & , \text{ für } SCV[I^\Sigma] > 1. \end{cases}$$

Korrekturterm

Die bisher aufgestellte Approximationsformel für den Rest-Bereich

$$E[N_q] = \frac{\rho^\Sigma C(c, \rho^\Sigma)}{1 - \rho^\Sigma} b^\Sigma \left(\frac{SCV[I^\Sigma] + SCV[S^\Sigma]}{2} \right) \cdot k_{KLB}$$

weist die gleiche Ungenauigkeit auf, welche schon in Abschnitt 3.2.3 beschrieben wurde. Analog zum Korrekturterm für $G^X/G^{(b,b)}/c$ -Warteschlangensysteme lassen sich die Korrekturterme für alle Produktklassen k einzeln bestimmen

$$E[Y_\infty^{(k)}] \approx \left(\frac{E[X^{(k)2}]}{E[X^{(k)}]} - b^{(k)}c \right) \frac{\rho^{*(k)}}{2}.$$

Der Korrekturterm $E[Y_\infty^\Sigma]$ des stochastischen Prozesses $(Y_t^\Sigma)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ beschreibt die Anzahl der Lose aller Produktklassen in der Warteschlange des Rest-Bereichs im Zeitintervall $[0, t]$. Es werden zunächst nicht negative Werte der einzelnen ermittelten Korrekturterme $E[Y_\infty^{(k)}]$ berücksichtigt

$$E[Y_\infty^{(k)}] = \max \left\{ 0, \left(\frac{E[X^{(k)2}]}{E[X^{(k)}]} - b^{(k)}c \right) \frac{\rho^{*(k)}}{2} \right\}.$$

Da paarweise stochastische Unabhängigkeit für die Eingangsgruppengrößen $X^{(k)}$ vorausgesetzt wird, lässt sich die mittlere Anzahl der Lose aller Produktklassen in der Warteschlange mittels der Superposition der $E[Y_\infty^{(k)}]$ bestimmen

$$E[Y_\infty^\Sigma] = \sum_{k=1}^K E[Y_\infty^{(k)}].$$

Analog zu Abschnitt 3.2.3 berechnet sich die mittlere Anzahl Aufträge in einem Warteschlangensystem durch die Summe der ermittelten mittleren Anzahl Aufträge im Batching-Bereich und der mittleren Anzahl Aufträge im Rest-Bereich

$$E[N] \approx \begin{cases} E[Z_\infty^\Sigma] + b^\Sigma \cdot E[N_q]_{G/G/c}(\rho^\Sigma, SCV[I^\Sigma], SCV[S^\Sigma]) + b^\Sigma c \rho^\Sigma + E[Y_\infty^\Sigma], & \left(\frac{E[X^{(k)2}]}{E[X^{(k)}]} - b^{(k)}c \right) > 0 \\ E[Z_\infty^\Sigma] + b^\Sigma \cdot E[N_q]_{G/G/c}(\rho^\Sigma, SCV[I^\Sigma], SCV[S^\Sigma]) + b^\Sigma c \rho^\Sigma, & \left(\frac{E[X^{(k)2}]}{E[X^{(k)}]} - b^{(k)}c \right) \leq 0. \end{cases}$$

Simulations- und Approximationsergebnisse

In [Grö07] wurden umfangreiche Simulationen zur Evaluierung der Approximationsformeln für $G^{X^{(k)}}/G^{(b^{(k)}, b^{(k)})}/c$ -Warteschlangensysteme durchgeführt. Die wichtigsten Erkenntnisse beziehungsweise Beobachtungen werden in diesem Abschnitt kurz zusammengefasst. Simuliert wurden 24 verschiedene Modelle, die sich in der Ausprägung der Anzahl der Bediener, Größe der Lose, Auslastung und der Eingangsgruppengröße der zwei Produktklassen unterscheiden. Die Gesamtauslastung der Modelle wurde zwischen hohen, mittleren und geringen Auslastungen variiert. Variationen zwischen dem Verhältnis der Produktklassen-spezifischen Auslastungen wurden ebenfalls berücksichtigt. Gewählt wurden die Verhältnisse 1 : 1, 2 : 3 und 1 : 4. Simuliert wurde jedes Modell mit unterschiedlich gesetzten Produktklassen-spezifischen Variationskoeffizienten der Zwischenankunfts- und Bedienzeiten, die sich zwischen 0 und 1.44 bewegen.

Verglichen wurden die Simulationsergebnisse mit den berechneten Approximationen aus der Formel von Allen und Cunneen mit und ohne dem Korrekturfaktor von Krämer und Langenbach-Belz.

Der Vergleich zwischen der Approximationsformel von Allen und Cunneen mit und ohne Korrekturfaktor zeigt allgemein, dass der Korrekturfaktor von Krämer und Langenbach-Belz die Ergebnisse nach unten korrigiert. In Fällen der Unterschätzung der Referenzwerte führt die Korrektur zu einer Verschlechterung der Näherungswerte.

Im Fall, dass die Eingangsgruppengröße größer ist als die Losgröße, $b^{(k)} < X^{(k)}$, zeigt die Simulationsstudie, dass die berechneten Werte die Referenzwerte unterschätzen. Eine Verwendung des Korrekturfaktors führt entsprechend zu einer Verstärkung des Fehlers. Der Fehler erhöht sich nochmals, wenn das Warteschlangensystem neben der Ausprägung $b^{(k)} < X^{(k)}$ konstante Bedienzeiten besitzt. Die stärksten Abweichungen entstehen, falls die $SCV[I^{(k)}]$ nahe 0 und die $SCV[S^{(k)}]$ nahe 1.44 sind. Eine fallende Tendenz der Approximationsgüte ist mit einer fallenden Auslastung zu beobachten. Dies ist auf den Ansatz der “heavy traffic”-Approximation der Näherungsformeln zurückzuführen.

Negativ wirkt sich in diesem Zusammenhang zusätzlich die Erhöhung der Anzahl der Bediener auf den Fehler aus, wenn das Warteschlangensystem die Parametrisierung $b^{(k)} < X^{(k)}$ besitzt.

Wird $SCV[I^{(1)}] = SCV[I^{(2)}] < 1$ gesetzt, ergeben sich für hohe, mittlere und geringe Auslastungen gute Approximationen, wobei die Formel von Allen und Cunneen ohne den Korrekturfaktor von Krämer und Langenbach-Belz bessere Werte erzielt. Ist $b^{(k)} > X^{(k)}$ und $SCV[I^{(1)}] = SCV[I^{(2)}] < 1$,

führt die Erhöhung der Anzahl der Bediener zu keinen größeren Abweichungen unabhängig von der Wahl der Höhe der Gesamtauslastung. Allgemein ist zu beobachten, dass eine Erhöhung der Anzahl der Bediener zu einer Überschätzung der Simulationswerte führt, weshalb die Approximationsformel von Allen und Cunneen mit dem Korrekturfaktor von Krämer und Langenbach-Belz zu bevorzugen ist.

Eine Erhöhung der Losgröße gegenüber der Eingangsgruppengröße führt zu keinen größeren Abweichungen. Werden im Fall $E[X^{(k)}] < b^{(k)}$ und $\rho^\Sigma = 0.9$ für die Eingangsgruppengrößen unterschiedliche Verteilungen angesetzt, sind die Auswirkungen auf den Fehler sehr gering. Auffällig sind Abweichungen, wenn $SCV[I^{(k)}] = 0$ gewählt wird. Eine Variation der Produktklassenspezifischen Auslastung mit unterschiedlichen Verhältnissen führt im Allgemeinen zu keiner Verschlechterung der approximativen Ergebnisse.

4 Dekomposition von offenen Warteschlangennetzen ohne Produktformllösung

Die ersten Verfahren zur Bestimmung von Kennzahlen von Warteschlangennetzen wurden in den 60ziger Jahren entwickelt. Für einige wenige Warteschlangennetze, die bestimmte Voraussetzungen erfüllen, existieren geschlossene analytische Formeln. In den meisten Fällen ist es schwierig, eine geschlossene analytische Formel anzugeben beziehungsweise gegenwärtig überhaupt nicht möglich. Es muss deshalb auf approximative Verfahren zurückgegriffen werden. Eine analytische Lösungsstrategie für Warteschlangennetze ist die Dekompositionsmethode. Diese nutzt approximative Berechnungen, um die gesuchten Kennzahlen eines Warteschlangennetzes näherungsweise zu bestimmen und stellt funktionale Zusammenhänge zwischen Parametern und Kenngrößen her, die für ein generelles Modellverständnis hilfreich sind. Einführende Literatur wird beispielsweise durch [BGMT06], [GP98], [Lav83], [Gau12], [Zis99] und [Fra03] bereitgestellt.

4.1 Dekompositionsmethode

Die Dekompositionsmethode geht von der Annahme aus, dass die einzelnen Komponenten des Warteschlangennetzes durch allgemeine $G/G/c$ -Systeme dargestellt und die Ströme zwischen den Komponenten durch Erneuerungsprozesse approximiert werden können. Aus diesem Ansatz resultieren zwei lineare Gleichungssysteme. Eines hat die Ankunftsrate und das andere die quadrierten Variationskoeffizienten der Ankunftsströme zur Lösung.

Zunächst wird die Dekompositionsmethode für offene Warteschlangennetze ohne und mit Batch Service im Ein-Produktfall vorgestellt. Die ausführliche Herleitung der Methode erfolgt im Unterkapitel 4.4, welches die Ausweitung des Verfahrens auf den Mehr-Produktfall mit Batch Service beinhaltet.

4.2 Offene Warteschlangennetze ohne Batch Service

Modellbeschreibung

Das offene Netz besteht aus $N \in \mathbb{N}, N \geq 2$ Knoten, die mit $1, \dots, N$ durchnummeriert sind. Zwischen zwei Knoten $i \in N$ und $j \in N$ existiert eine Übergangswahrscheinlichkeit $0 \leq p_{ij} \leq 1$. Aufträge treten in das Netz mit der Ankunftsrate $\lambda_0 < \infty$ und dem quadrierten Variationskoeffizienten

$SCV[D_0] < \infty$ ein. Es gilt

$$\sum_{i=1}^N p_{0i} = 1.$$

Die Knoten repräsentieren $G/G/c$ -Warteschlangensysteme. Die Zwischenankunftszeiten an einem Knoten i entsprechen den Zwischenabgangszeiten der aufgespaltenen Abgangsprozesse der Vorgängerknoten j und werden durch eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen $(D_{j,n})_{n \in \mathbb{N}}$ mit dem Erwartungswert $E[D_j] < \infty$ und dem quadrierten Variationskoeffizienten $SCV[D_j] < \infty$ beschrieben. Es wird vorausgesetzt, dass die Bedienzeiten $(S_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ mit dem Erwartungswert

$E[S_i] < \infty$ und dem quadrierten Variationskoeffizienten $SCV[S_i] < \infty$ unabhängig voneinander und unabhängig von den Zwischenankunftszeiten sind.

Dekomposition

Um von dem Ansatz des “Freischneidens” profitieren zu können, benötigt man angesichts der Näherungsformel von Allen und Cunneen beziehungsweise Krämer und Langenbach-Belz für jeden Knoten i des Systems die mittlere Ankunftsrate λ_i und den $SCV[I_i]$ des Inputstroms.

Zur Bestimmung der λ_i werden die “traffic equation” genutzt

$$\lambda_i = \lambda_{0i} + \sum_{j=1}^N p_{ji} \lambda_j, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Das zweite Moment beziehungsweise der quadrierte Variationskoeffizient von $(I_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ kann durch ein zweites lineares Gleichungssystem ermittelt werden [PA86]

$$SCV[I_i] = \frac{1}{\lambda_i} \sum_{j=1}^N p_{ji} \lambda_j ((SCV[D_j] - 1) p_{ji} + 1) + p_{0i} \lambda_0 ((SCV[D_0] - 1) p_{0i} + 1) \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (4.1)$$

Pujolle und Ai [PA86] beschreiben die Zwischenabgangszeiten durch die Fallunterscheidung

$$D_j \approx \begin{cases} S_j/c_j & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \rho_j \\ S_j/c_j + I_j & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \rho_j, \end{cases}$$

wobei ρ_j die Auslastung an einem Knoten j ist und durch $\rho_j = \lambda_j \cdot E[S_j]/c_j < 1$ ermittelt wird. Durch die Berechnung des ersten und zweiten Moments des

Prozesses D_j kann der zugehörige quadrierte Variationskoeffizient aufgestellt werden

$$SCV[D_j] \approx \rho_j^2 SCV[S_j] + (1 - \rho_j) SCV[I_j] + (1 - \rho_j) \rho_j. \quad (4.2)$$

Wird (4.2) in (4.1) eingesetzt, ist es möglich die quadrierten Variationskoeffizienten der Zwischenankunftszeiten zu berechnen, die zur näherungsweisen Bestimmung der Kennzahlen der Warteschlangensysteme durch die Formel von Allen und Cunneen notwendig sind.

$$SCV[I_i] = \frac{1}{\lambda_i} \sum_{j=1}^N p_{ji} \lambda_j (p_{ji} ([\rho_j^2 SCV[S_j] + (1 - \rho_j) SCV[I_j] + (1 - \rho_j) \rho_j] - 1) + 1) + p_{0i} \lambda_0 ((SCV[D_0] - 1) p_{0i} + 1) \\ i, j = 1, \dots, N.$$

4.3 Offene Warteschlangennetze mit Batch Service im Ein-Produktfall

Modellbeschreibung

Das betrachtete offene Netz besteht aus $N \in \mathbb{N}, n \geq 2$ Knoten, die fortlaufend durchnummeriert sind. Zwischen den Knoten existiert eine Übergangswahrscheinlichkeit $0 \leq p_{ij} \leq 1$ mit $i, j \in N$. Die Aufträge treten in das Netz in Gruppen der Größe b_0 ein. Der Ankunftsprozess, der sich auf Eingangsgruppen bezieht, wird durch die Maße $\lambda_0 < \infty$ und $SCV[D_0] < \infty$ beschrieben. Es gilt

$$\sum_{i=1}^N p_{0i} = 1.$$

Die Knoten repräsentieren $G^X/G^{(b,b)}/c$ -Warteschlangensysteme. Die Zwischenankunftszeiten der Lose an einem Knoten i entsprechen der Überlagerung der Zwischenabgangszeiten der Lose der Vorgängerknoten j und werden durch eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen $(D_{j,n})_{n \in \mathbb{N}}$ mit dem Erwartungswert $E[D_j] < \infty$ und dem quadrierten Variationskoeffizienten $SCV[D_j] < \infty$ beschrieben. Es wird vorausgesetzt, dass die Bedienzeiten der Lose $(S_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ mit dem Erwartungswert $E[S_i] < \infty$ und dem quadrierten Variationskoeffizienten $SCV[S_i] < \infty$ unabhängig voneinander und unabhängig von den Zwischenankunftszeiten sind.

Dekomposition

Um die Ströme zwischen den Warteschlangensystemen zu beschreiben, wird eine modifizierte Form der “traffic equation” genutzt [HZ11]

$$\tau_i = p_{0i} \frac{b_0}{b_i} + \sum_{j=1}^N p_{ji} \tau_j \frac{b_j}{b_i} \quad \text{mit} \quad \tau_0 := 1, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (4.3)$$

τ_i beschreibt den relativen Durchsatz. Der relative Durchsatz charakterisiert die mittlere Anzahl von Losen, die pro Zeiteinheit aus dem Warteschlangensystem austreten. Es wird vorausgesetzt, dass die Ströme Erneuerungsprozesse bilden. Die Ankunftsrate der Lose an einem Knoten i berechnet sich gemäß $\lambda_i = \lambda_0 \tau_i$ und die Auslastung gemäß $\rho_i = \lambda_0 \tau_i \cdot E[S_i]/c_i < 1$. Die Lösung des linearen Gleichungssystems (4.3) fließt in das zweite lineare Gleichungssystem ein, das die Zwischenankunftszeiten an einem Knoten i mit den Zwischenabgangszeiten $(D_{j,n})_{j \in \mathbb{N}}$ der Vorgängerknoten j verknüpft [HZ11] und den quadrierten Variationskoeffizienten der Zwischenankunftszeiten ermittelt

$$SCV[I_i] = \left(\sum_{j=0}^N p_{ji} \tau_j \right)^{-1} \sum_{j=0}^N p_{ji} \tau_j ((SCV[D_j] - 1) p_{ji} + 1) \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (4.4)$$

Um den $SCV[D_j]$ durch die Zwischenankunfts- und Bedienzeiten der Vorgängerknoten j auszudrücken, wird die Beschreibung des Prozesses D_j

$$D_j \approx \begin{cases} S_j/c_j & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \rho_j \\ S_j/c_j + I_j^* & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \rho_j \end{cases}$$

verwendet [HZ11], wobei der Prozess $(I_{j,n}^*)_{n \in \mathbb{N}}$ die Zwischenankunftszeiten der Lose beschreibt. Indem das erste und zweite Moment der Zwischenabgangszeiten berechnet werden, lässt sich der quadrierte Variationskoeffizient formulieren

$$SCV[D_j] \approx \rho_j^2 SCV[S_j] + (1 - \rho_j) SCV[I_j^*] + (1 - \rho_j) \rho_j. \quad (4.5)$$

Die $SCV[I_j^*]$ werden durch

$$SCV[I_j^*] \approx \frac{E[X_j]}{b_j} (SCV[X_j] + SCV[I_j]) \quad (4.6)$$

approximiert [Han06]. Die Maße der Eingangsgruppengröße X_j , wobei X_j eine positive ganzzahlige Zufallsvariable ist, hängen von den Übergangswahrscheinlichkeiten, den eingehenden Losgrößen und dem relativen Durchsatz an einem Knoten j ab

$$E[X_j] = \frac{\sum_{i=0}^N b_i p_{ij} \tau_i}{\sum_{i=0}^N p_{ij} \tau_i} \quad \text{und} \quad E[X_j^2] = \frac{\sum_{i=0}^N b_i^2 p_{ij} \tau_i}{\sum_{i=0}^N p_{ij} \tau_i}.$$

Der quadrierte Variationskoeffizient der Eingangsgruppengröße ergibt sich aus $SCV[X_j] = (E[X_j^2]/E[X_j]^2) - 1$. Werden die Gleichungen (4.5) und (4.6) in (4.4) eingesetzt, resultiert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} SCV[I_i] = & \left(\sum_{j=0}^N p_{ji} \tau_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^N p_{ji} \tau_j \left(([\rho_j^2 SCV[S_j]] \right. \\ & + (1 - \rho_j) \left(\frac{E[X_j]}{b_j} (SCV[X_j] + SCV[I_j]) \right) \\ & \left. + (1 - \rho_j) \rho_j] - 1) p_{ji} + 1) + p_{0i} \tau_0 ((SCV[D_0] - 1) p_{0i} + 1) \right) \\ & i, j = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

das die unbekannten $SCV[I_i]$ für die approximative Berechnung der Kennzahlen der Warteschlangensysteme durch die modifizierte Formel von Allen und Cunneen [Han06] liefert.

4.4 Offene Warteschlangennetze mit Batch Service im Mehr-Produktfall

Modellbeschreibung

Das offene Netz besteht aus $N \in \mathbb{N}, N \geq 2$ Knoten, die sukzessiv durchnummeriert sind. Für jede Produktklasse $k \in \{1, \dots, K\}$ existiert zwischen zwei Knoten eine Übergangswahrscheinlichkeit $0 \leq p_{ij}^{(k)} \leq 1$. Aufträge, die einer Produktklasse $k \in \{1, \dots, K\}$ angehören, treten in Losen der Größe $b_0^{(k)}$ in das offene Netz ein mit der Ankunftsrate $\lambda_0^{(k)} < \infty$ und dem quadrierten Variationskoeffizienten $SCV[D_0^{(k)}] < \infty$. Es gilt

$$\sum_{i=1}^N p_{0i}^{(k)} = 1.$$

Die Knoten repräsentieren $G^{X^{(k)}}/G^{(b^{(k)}, b^{(k)})}/c$ -Warteschlangensysteme. Die Zwischenankunftszeiten der Lose einer Produktklasse k an einem Knoten i entsprechen der Überlagerung der Zwischenabgangszeiten der Vorgängerknoten j bezogen auf die jeweilige Produktklasse. Die Zwischenabgangszeiten werden durch eine Folge von i. i. d. Zufallsvariablen $(D_{j,n})_{n \in \mathbb{N}}$ mit dem Erwartungswert $E[D_j] < \infty$ und dem quadrierten Variationskoeffizienten $SCV[D_j] < \infty$ beschrieben. Es wird festgelegt, dass die Lose sortenrein sind und die Bediener Lose von allen Produktklassen bearbeiten können. Die Bedienzeiten für die Lose einer Produktklasse werden durch den Prozess $(S_{i,n}^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ mit dem Erwartungswert $E[S_i^{(k)}] < \infty$ und dem quadrierten Variationskoeffizienten $SCV[S_i^{(k)}] < \infty$ beschrieben. Es wird vorausgesetzt, dass die Bedienzeiten zwischen den Produktklassen paarweise unabhängig voneinander und unabhängig von den Zwischenankunftszeiten sind.

Dekomposition

Die Ströme zwischen den Warteschlangensystemen werden durch die modifizierte “traffic equation” in Abhängigkeit der jeweiligen Produktklasse beschrieben

$$\tau_i^{(k)} = p_{0i}^{(k)} \frac{b_0^{(k)}}{b_i^{(k)}} + \sum_{j=1}^N p_{ji}^{(k)} \tau_j^{(k)} \frac{b_j^{(k)}}{b_i^{(k)}} \quad \text{mit} \quad \tau_0^{(k)} := 1, \\ i = 1, \dots, N \\ k = 1, \dots, K. \quad (4.7)$$

$\tau_i^{(k)}$ beschreibt den relativen Durchsatz an einem Knoten i für die Produktklasse k . Dieser gibt an, wie viele Lose der Produktklasse k im Mittel das Warteschlangensystem pro Zeiteinheit verlassen. Es sind entsprechend der Anzahl der Produktklassen mehrere lineare Gleichungssysteme zu lösen. Die Abgangsrate der Lose beziehungsweise der relative Durchsatz bezüglich der Batchgröße der Bediener an einem Knoten i für eine Produktklasse k berechnet sich anschließend gemäß $\lambda_i^{(k)} = \lambda_0^{(k)} \tau_i^{(k)}$ und die Produktklassenspezifische Auslastung gemäß $\rho_i^{(k)} = \lambda_0^{(k)} \tau_i^{(k)} \cdot E[S_i^{(k)}]/c_i < 1$. $\lambda_0^{(k)} \tau_i^{(k)} b_i^{(k)}$ beschreibt den relativen Durchsatz bezogen auf die tatsächliche Anzahl Aufträge.

Die Zwischenankunftszeiten an einem Knoten i werden mit den Zwischenabgangszeiten $(D_{j,n})_{n \in \mathbb{N}}$ der Vorgängerknoten j verknüpft, was zu einem zweiten linearen Gleichungssystem führt, das den quadrierten Variationskoeffizienten

enten der Zwischenankunftszeiten $(I_{i,n}^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ liefert

$$SCV[I_i^{(k)}] = \left(\sum_{j=0}^N p_{ji}^{(k)} \tau_j^{(k)} \right)^{-1} \sum_{j=0}^N p_{ji}^{(k)} \tau_j^{(k)} ((SCV[D_j] - 1)p_{ji}^{(k)} + 1)$$

$$i = 1, \dots, N$$

$$k = 1, \dots, K. \quad (4.8)$$

Dieses System wird erzeugt, wenn die drei Phasen (Abbildung 4.1) – Bildung der Superposition der Ankunftsströme, Bestimmung des Abgangsstroms und Aufspaltung des Abgangsstroms – ineinander eingesetzt werden.

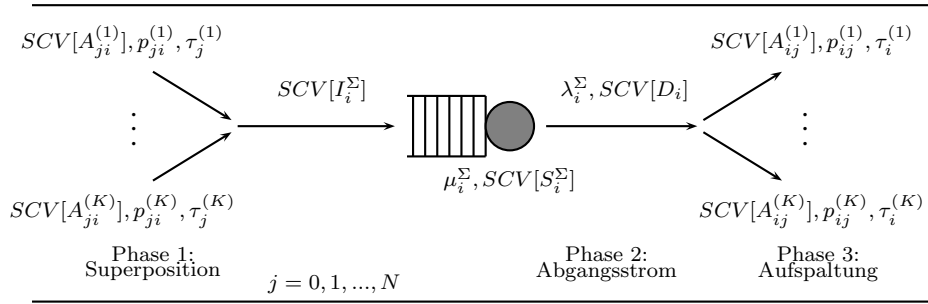


Abbildung 4.1: Dekompositionsmethode für offene Netze mit $G^X/G^{(b,b)}/c$ -Systemen im Mehr-Produktfall

Phase 1: Bestimmung der Superposition der Ankunftsströme

Um die quadrierten Variationskoeffizienten der überlagerten Ankunftsströme einer Produktklasse k $(I_{i,n}^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ zu erhalten, wird zunächst die Varianz des mit dem Erneuerungsprozess am Knoten i assoziierten Zählprozesses $(N_{i,t}^{(k)})_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ beschrieben, welcher sich auf Lose bezieht

$$Var[N_{i,t}^{(k)}] = \frac{Var[I_i^{(k)}]}{E[I_i^{(k)}]^3} t = \lambda_i^{(k)} SCV[I_i^{(k)}] t. \quad (4.9)$$

Der gesuchte Ankunftsprozess $(I_{i,n}^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ kann außerdem durch die aufgespaltenen Abgangsprozesse $A_{ji}^{(k)}$ der Vorgängerknoten beschrieben werden. $(N_{ji,t}^{(k)})_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ charakterisiere den Zählprozess zum assoziierten aufgespaltenen Abgangsstrom an Station j . Der Prozess beschreibt die Anzahl Lose der Produktklasse k , die von Station j nach Station i im Zeitintervall $[0, t]$ transportiert werden. Gemäß dem Satz über das asymptotische Verhalten von

Erneuerungsprozessen (Satz 2, Seite 16) resultiert für die Varianz

$$\begin{aligned} \text{Var}[N_{j,t}^{(k)}] &= \frac{\text{Var}[A_{ji}^{(k)}]}{E[A_{ji}^{(k)}]^3} t = \frac{1}{E[A_{ji}^{(k)}]} \cdot \frac{\text{Var}[A_{ji}^{(k)}]}{E[A_{ji}^{(k)}]^2} t \\ &= p_{ji}^{(k)} \frac{1}{E[I_j^{(k)}]} \text{SCV}[A_{ji}^{(k)}] t = p_{ji}^{(k)} \lambda_j^{(k)} \text{SCV}[A_{ji}^{(k)}] t. \end{aligned}$$

Durch die Forderung der Unabhängigkeit der Abgangsströme lassen sich die Varianzen der Zählprozesse $(N_{ji,t}^{(k)})_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ über alle Knoten im Netz aufsummieren, um die Varianz des Zählprozesses $(N_{i,t}^{(k)})'_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ zu erhalten

$$\text{Var}[N_{i,t}^{(k)}]' = \sum_{j=0}^N p_{ji}^{(k)} \lambda_j^{(k)} \text{SCV}[A_{ji}^{(k)}] t \quad (4.10)$$

Werden die Gleichungen (4.9) und (4.10) gleichgesetzt, lässt sich die gesuchte Größe bezüglich der Batchgröße der Bediener bestimmen

$$\begin{aligned} \text{Var}[N_{i,t}^{(k)}] &= \text{Var}[N_{i,t}^{(k)}]' \\ \lambda_i^{(k)} \text{SCV}[I_i^{(k)}] t &= \sum_{j=0}^N p_{ji}^{(k)} \lambda_j^{(k)} \text{SCV}[A_{ji}^{(k)}] t \\ \text{SCV}[I_i^{(k)}] &= \frac{1}{\lambda_i^{(k)}} \sum_{j=0}^N p_{ji}^{(k)} \lambda_j^{(k)} \text{SCV}[A_{ji}^{(k)}] \\ i &= 1, \dots, N \\ k &= 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Phase 3: Aufspaltung des Abgangstroms

Das Aufspalten des Abgangstroms $(D_{j,n})_{n \in \mathbb{N}}$ kann als Bernoulli-Experiment aufgefasst werden. Mit Wahrscheinlichkeit $0 \leq p_{ji}^{(k)} \leq 1$ wird ein Los von Aufträgen der Produktklasse k von Knoten j zum Knoten i transportiert. Sei $V^{(k)}$ eine Zufallsvariable, die die Nummer des ersten Loses beschreibt, das Knoten i erreicht ausgehend von Knoten j . $V^{(k)}$ ist geometrisch verteilt mit

$$P(V^{(k)} = v) = p_{ji}^{(k)} (1 - p_{ji}^{(k)})^{v-1} \quad \text{für } v = 1, 2, 3, \dots,$$

und dem Erwartungswert

$$E[V^{(k)}] = \frac{1}{p_{ji}^{(k)}}$$

und der Varianz

$$Var[V^{(k)}] = \frac{1 - p_{ji}^{(k)}}{p_{ji}^{(k)2}}.$$

Unter der Voraussetzung, dass der Abgangsstrom einen Erneuerungsprozess bildet und unter Verwendung der Wald'schen Gleichung (Satz 3, Seite 31) lassen sich Erwartungswert und Varianz des Aufspaltungsprozesses $A_{ji}^{(k)}$ bestimmen

$$E[A_{ji}^{(k)}] = E\left[\sum_{n=1}^{V^{(k)}} D_{j,n}\right] = E[V^{(k)}]E[D_j] = \frac{1}{p_{ji}^{(k)}}E[D_j],$$

$$\begin{aligned} Var[A_{ji}^{(k)}] &= Var\left[\sum_{n=1}^{V^{(k)}} D_{j,n}\right] = E[V^{(k)}]Var[D_j] + Var[V^{(k)}]E[D_j]^2 \\ &= \frac{1}{p_{ji}^{(k)}}Var[D_j] + \frac{1 - p_{ji}^{(k)}}{p_{ji}^{(k)2}}E[D_j]^2. \end{aligned}$$

Anschließend ist der quadrierte Variationskoeffizient des Prozesses $A_{ji}^{(k)}$ ermittelbar

$$\begin{aligned} SCV[A_{ji}^{(k)}] &= \frac{Var[A_{ji}^{(k)}]}{E[A_{ji}^{(k)}]^2} = p_{ji}^{(k)} \frac{Var[D_j]}{E[D_j]^2} + (1 - p_{ji}^{(k)}) \\ &= (1 + p_{ji}^{(k)}(SCV[D_j] - 1)). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Phase 2: Bestimmung des Abgangsstroms

Es wird vorausgesetzt, dass die Ankunfts- und Bedienprozesse Erneuerungsprozesse darstellen. Die aggregierte Auslastung ist $\rho_j^\Sigma = \sum_{k=1}^K (\lambda_0^{(k)} \tau_j^{(k)}) \cdot E[S_j^{(k)}] / c_j < 1$. Ist ρ_j^Σ hoch, kann der Abgangsprozess $(D_{j,n})_{n \in \mathbb{N}}$ bezogen auf Lose mit dem Ansatz von Pujolle/Ai approximiert werden durch

$$D_j \approx \begin{cases} S_j^\Sigma / c_j & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \rho_j^\Sigma \\ S_j^\Sigma / c_j + I_j^\Sigma & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \rho_j^\Sigma. \end{cases}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ρ_j^Σ tritt alle S_j^Σ Zeiteinheiten ein Los von Aufträgen aus jeder einzelnen Bedieneinheit des Knoten j aus. Insgesamt tritt

also alle S_j^Σ/c_j Zeiteinheiten ein Los am Knoten j aus. Wird die Beschäftigungsphase des Warteschlangensystems j unterbrochen, tritt alle $S_j^\Sigma/c_j + I_j^\Sigma$ Zeiteinheiten ein Los aus dem Knoten aus. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall beträgt $1 - \rho_j^\Sigma$. Um den $SCV[D_j]$ zu berechnen, werden das erste Moment

$$E[D_j] = \rho_j^\Sigma \frac{E[S_j^\Sigma]}{c_j} + (1 - \rho_j^\Sigma) E \left[\frac{S_j^\Sigma}{c_j} + I_j^\Sigma \right] = E[I_j^\Sigma] \quad (4.13)$$

und das zweite Moment

$$\begin{aligned} E[D_j^2] &= \rho_j^\Sigma \frac{E[S_j^{\Sigma 2}]}{c_j} + (1 - \rho_j^\Sigma) E \left[\left(\frac{S_j^\Sigma}{c_j} + I_j^\Sigma \right)^2 \right] \\ &= \frac{E[S_j^{\Sigma 2}]}{c_j^2} + 2(1 - \rho_j^\Sigma) \frac{E[S_j^\Sigma]}{c_j} E[I_j^\Sigma] + (1 - \rho_j^\Sigma) E[I_j^{\Sigma 2}] \end{aligned}$$

des Prozesses $(D_{j,n})_{n \in \mathbb{N}}$ bestimmt. Der $SCV[D_j]$ lässt sich anschließend charakterisieren

$$SCV[D_j] = \frac{E[D_j^2]}{E[D_j]^2} - 1 = \rho_j^{\Sigma 2} SCV[S_j^\Sigma] + (1 - \rho_j^\Sigma) SCV[I_j^\Sigma] + (1 - \rho_j^\Sigma) \rho_j^\Sigma. \quad (4.14)$$

Maße, die mit einem Σ gekennzeichnet wurden, beschreiben aggregierte Größen. Die quadrierten aggregierten Variationskoeffizienten der Bedienzeiten werden durch

$$SCV[S_j^\Sigma] = \frac{E[S_j^{\Sigma 2}]}{E[S_j^\Sigma]^2} - 1$$

mit dem ersten Moment

$$E[S_j^\Sigma] = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_0^{(k)} \tau_j^{(k)}}{\sum_{k=1}^K \lambda_0^{(k)} \tau_j^{(k)}} E[S_j^{(k)}]$$

und dem zweiten Moment

$$E[S_j^{\Sigma 2}] = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_0^{(k)} \tau_j^{(k)}}{\sum_{k=1}^K \lambda_0^{(k)} \tau_j^{(k)}} E[S_j^{(k)}]^2 (SCV[S_j^{(k)}] + 1)$$

beschrieben [Grö07].

Die quadrierten aggregierten Variationskoeffizienten der Zwischenankunftszeiten werden durch [Han06]

$$SCV[I_j^\Sigma] \approx \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_0^{(k)} \tau_j^{(k)}}{\sum_{\ell=1}^K \lambda_0^{(\ell)} \tau_j^{(\ell)}} \frac{E[X_j^{(k)}]}{b_j^{(k)}} (SCV[X_j^{(k)}] + SCV[I_j^{(k)}]) \quad (4.15)$$

approximiert. Der Gewichtungsfaktor $\lambda_0^{(k)} \tau_j^{(k)} / \sum_{k=1}^K \lambda_0^{(k)} \tau_j^{(k)}$ bezieht sich auf Bediengruppen und setzt die Rate $\lambda_i^{(k)} = \lambda_0^{(k)} \tau_i^{(k)}$ der Bediengruppe der Produktklasse k ins Verhältnis zur Rate $\lambda_j^\Sigma = \sum_{k=1}^K \lambda_0^{(k)} \tau_j^{(k)}$ über alle Produktklassen.

$X_j^{(k)}$ charakterisiert eine positive ganzzahlige Zufallsvariable, die die Eingangsgruppengröße repräsentiert. Das erste und zweite Moment der Größe wird für alle Produktklassen bestimmt durch

$$E[X_j^{(k)}] = \frac{\sum_{i=0}^N b_i^{(k)} p_{ij}^{(k)} \tau_i^{(k)}}{\sum_{i=0}^N p_{ij}^{(k)} \tau_i^{(k)}} \quad \text{und} \quad E[X_j^{(k)2}] = \frac{\sum_{i=0}^N b_i^{(k)2} p_{ij}^{(k)} \tau_i^{(k)}}{\sum_{i=0}^N p_{ij}^{(k)} \tau_i^{(k)}}.$$

Der quadrierte Variationskoeffizient berechnet sich anschließend durch $SCV[X_j^{(k)}] = (E[X_j^{(k)2}] / E[X_j^{(k)}]^2) - 1$.

Die mittlere Anzahl Aufträge, die durch ein Warteschlangensystem strömt, lässt sich beschreiben gemäß

$$\lambda_i^\Sigma b_i^\Sigma = \lambda_i^\Sigma \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_i^{(k)}}{\lambda_i^\Sigma} b_i^{(k)} = \sum_{k=1}^K \lambda_i^{(k)} b_i^{(k)}.$$

Zusammenführung der Phasen

Wird (4.12) in (4.11) eingesetzt, resultiert (4.8) und mit (4.14) und (4.15) beinhaltet das lineare Gleichungssystem die gesuchten quadrierten Variationskoeffizienten der Zwischenankunftszeiten $SCV[I_i^{(k)}]$ als unbekannte Größen

$$SCV[I_i^{(k)}] = \left(\sum_{j=0}^N p_{ji}^{(k)} \tau_j^{(k)} \right)^{-1} \sum_{j=1}^N p_{ji}^{(k)} \tau_j^{(k)} \left(([\rho_j^{\Sigma 2} SCV[S_j^{\Sigma}] + (1 - \rho_j^{\Sigma}) \cdot \right. \\ \left. \left(\sum_{k=1}^K \frac{\lambda_0^{(k)} \tau_j^{(k)}}{\sum_{k=1}^K \lambda_0^{(k)} \tau_j^{(k)}} \frac{E[X_j^{(k)}]}{b_j^{(k)}} (SCV[X_j^{(k)}] + SCV[I_j^{(k)}]) \right) \right. \\ \left. + (1 - \rho_j^{\Sigma}) \rho_j^{\Sigma} - 1) p_{ji}^{(k)} + 1 \right) + p_{0i}^{(k)} \tau_0^{(k)} ((SCV[D_0] - 1) p_{0i}^{(k)} + 1) \\ i = 1, \dots, N \\ k = 1, \dots, K. \quad (4.16)$$

Der Faktor $1/\lambda_i^{(k)}$ aus Gleichung (4.11) wird durch $\left(\sum_{j=0}^N p_{ji}^{(k)} \tau_j^{(k)} \right)^{-1}$ ersetzt, der alle ankommenden Bediengruppen an Station i überlagert.

Die gesuchten Kenngrößen der Warteschlangensysteme werden durch die modifizierte Formel von Allen und Cunneen [Han06] im Mehr-Produktktfall [Grö07] bestimmt

$$E[N_i^{(k)}] \approx \begin{cases} E[Z_{i,\infty}^{(k)}] + \frac{\lambda_0^{(k)} \tau_i^{(k)} b_i^{(k)}}{\sum_{k=1}^K \lambda_0^{(k)} \tau_i^{(k)} b_i^{(k)}} b_i^{\Sigma} \cdot E[N_{q,i}]_{G/G/c}(\rho_i^{\Sigma}, SCV[I_i^{\Sigma}], SCV[S_i^{\Sigma}]) \\ + b_i^{(k)} c \rho_i^{(k)} + E[Y_{i,\infty}^{(k)}], \left(\frac{E[X_i^{(k)2}]}{E[X_i^{(k)}]} - b_i^{(k)} c_i \right) > 0 \\ E[Z_{\infty,i}^{(k)}] + \frac{\lambda_0^{(k)} \tau_i^{(k)} b_i^{(k)}}{\sum_{k=1}^K \lambda_0^{(k)} \tau_i^{(k)} b_i^{(k)}} b_i^{\Sigma} \cdot E[N_{q,i}]_{G/G/c}(\rho_i^{\Sigma}, SCV[I_i^{\Sigma}], SCV[S_i^{\Sigma}]) \\ + b_i^{(k)} c_i \rho_i^{(k)}, \left(\frac{E[X_i^{(k)2}]}{E[X_i^{(k)}]} - b_i^{(k)} c_i \right) \leq 0. \end{cases}$$

Kenngrößen, die das gesamte Warteschlangennetz betreffen, wie die mittlere Anzahl Aufträge $E[N]$ und die mittlere Verweilzeit $E[T]$, können durch Aggregation und mit Hilfe der Formel von Little [Lit61] ermittelt werden

$$E[N] = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K E[N_i^{(k)}] \quad E[T] = \frac{E[N]}{\sum_{k=1}^K \lambda_0^{(k)} b_0^{(k)}}.$$

4.4.1 Beispiel

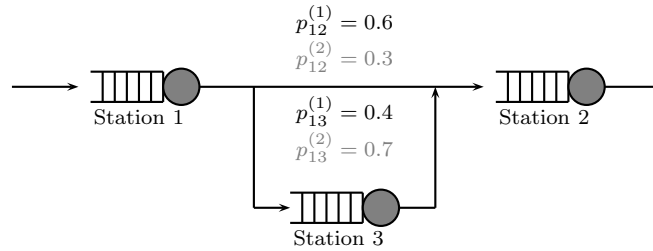


Abbildung 4.2: Beispielnetz

Beispiel – 2 Produktklassen										
Knoten i	c_i	ρ_i^Σ	Produktklasse							
			1				2			
			$b_i^{(1)}$	$\mu_i^{(1)}$	$\rho_i^{(1)}$	$SCV[S_i^{(1)}]$	$b_i^{(2)}$	$\mu_i^{(2)}$	$\rho_i^{(2)}$	$SCV[S_i^{(2)}]$
1	2	0.9	3	0.278	0.6	1.2	7	0.238	0.3	0.9
2	4	0.7	4	0.208	0.3	1	2	0.278	0.4	0.8
3	1	0.8	5	0.16	0.5	0.5	3	0.778	0.3	0.7

Tabelle 4.1: Beispiel – 2 Produktklassen: $\lambda_0^{(1)} = 1$, $\lambda_0^{(2)} = 1$, $SCV[D_0] = 1$, $b_0^{(1)} = 1$, $b_0^{(2)} = 1$

1: “traffic equation”:

$$\begin{aligned}\tau_0^{(1)} &= 1 \\ \tau_1^{(1)} &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ \tau_2^{(1)} &= 0.6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \tau_3^{(1)} \cdot \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \\ \tau_3^{(1)} &= 0.4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{25}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_0^{(2)} &= 1 \\ \tau_1^{(2)} &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{7} \\ \tau_2^{(2)} &= 0.3 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{2} + 1 \cdot \tau_3^{(2)} \cdot \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \\ \tau_3^{(2)} &= 0.7 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{30}\end{aligned}$$

2: Zu berechnende Parameter der Bedienstationen:

$$SCV[S_1^\Sigma] = 1.138 \quad SCV[S_2^\Sigma] = 0.87 \quad SCV[S_3^\Sigma] = 1.017$$

$$\text{mit} \quad E[S_j^{(k)}] = \left(\mu_j^{(k)} c_j \right)^{-1}$$

$$E[X_1^{(1)}] = 1 \quad E[X_2^{(1)}] = 3.571 \quad E[X_3^{(1)}] = 3$$

$$E[X_1^{(2)}] = 1 \quad E[X_2^{(2)}] = 3.621 \quad E[X_3^{(2)}] = 7$$

$$SCV[X_1^{(1)}] = 0 \quad SCV[X_2^{(1)}] = 0.064 \quad SCV[X_3^{(1)}] = 0$$

$$SCV[X_1^{(2)}] = 0 \quad SCV[X_2^{(2)}] = 0.16 \quad SCV[X_3^{(2)}] = 0$$

3: Lineares Gleichungssystem zur Berechnung der quadrierten Variationskoeffizienten der Zwischenankunftszeiten:

$$SCV[I_1^{(1)}] = (p_{01}^{(1)} \tau_0^{(1)})^{-1} \cdot p_{01}^{(1)} \tau_0^{(1)} (p_{01}^{(1)} \cdot (SCV[D_0] - 1) + 1) \\ = \underline{\underline{1}}$$

$$SCV[I_1^{(2)}] = (p_{01}^{(2)} \tau_0^{(2)})^{-1} \cdot p_{01}^{(2)} \tau_0^{(2)} (p_{01}^{(2)} \cdot (SCV[D_0] - 1) + 1) \\ = \underline{\underline{1}}$$

$$SCV[I_3^{(1)}] = (p_{13}^{(1)} \tau_1^{(1)})^{-1} \cdot p_{13}^{(1)} \tau_1^{(1)} (p_{13}^{(1)} \cdot ((\rho_1^{\Sigma 2} SCV[S_1^\Sigma] + (1 - \rho_1^\Sigma) \cdot \\ \left(\frac{\lambda_0^{(1)} \tau_1^{(1)}}{\lambda_0^{(1)} \tau_1^{(1)} + \lambda_0^{(2)} \tau_1^{(2)}} \cdot \frac{E[X_1^{(1)}]}{b_1^{(1)}} (SCV[X_1^{(1)}] + SCV[I_1^{(1)}]) \right. \\ \left. + \frac{\lambda_0^{(2)} \tau_1^{(2)}}{\lambda_0^{(1)} \tau_1^{(1)} + \lambda_0^{(2)} \tau_1^{(2)}} \cdot \frac{E[X_1^{(2)}]}{b_1^{(2)}} (SCV[X_1^{(2)}] + SCV[I_1^{(2)}]) \right) \\ \left. + (1 - \rho_1^\Sigma) \rho_1^\Sigma - 1) + 1) \right) \\ = \underline{\underline{1.004}}$$

$$SCV[I_3^{(2)}] = (p_{13}^{(2)} \tau_1^{(2)})^{-1} \cdot p_{13}^{(2)} \tau_1^{(2)} (p_{13}^{(2)} \cdot ((\rho_1^{\Sigma 2} SCV[S_1^\Sigma] + (1 - \rho_1^\Sigma) \cdot \\ \left(\frac{\lambda_0^{(1)} \tau_1^{(1)}}{\lambda_0^{(1)} \tau_1^{(1)} + \lambda_0^{(2)} \tau_1^{(2)}} \cdot \frac{E[X_1^{(1)}]}{b_1^{(1)}} (SCV[X_1^{(1)}] + SCV[I_1^{(1)}]) \right. \\ \left. + \frac{\lambda_0^{(2)} \tau_1^{(2)}}{\lambda_0^{(1)} \tau_1^{(1)} + \lambda_0^{(2)} \tau_1^{(2)}} \cdot \frac{E[X_1^{(2)}]}{b_1^{(2)}} (SCV[X_1^{(2)}] + SCV[I_1^{(2)}]) \right) \\ \left. + (1 - \rho_1^\Sigma) \rho_1^\Sigma - 1) + 1) \right) \\ = \underline{\underline{1.006}}$$

$$\begin{aligned}
SCV[I_2^{(1)}] &= (p_{12}^{(1)} \tau_1^{(1)} + p_{32}^{(1)} \tau_3^{(1)})^{-1} \cdot ((p_{12}^{(1)} \tau_1^{(1)} (p_{12}^{(1)} \cdot ((\rho_1^{\Sigma 2} SCV[S_1^\Sigma] + (1 - \rho_1^\Sigma) \cdot \\
&\quad \left(\frac{\lambda_0^{(1)} \tau_1^{(1)}}{\lambda_0^{(1)} \tau_1^{(1)} + \lambda_0^{(2)} \tau_1^{(2)}} \cdot \frac{E[X_1^{(1)}]}{b_1^{(1)}} (SCV[X_1^{(1)}] + SCV[I_1^{(1)}]) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda_0^{(2)} \tau_1^{(2)}}{\lambda_0^{(1)} \tau_1^{(1)} + \lambda_0^{(2)} \tau_1^{(2)}} \cdot \frac{E[X_1^{(2)}]}{b_1^{(2)}} (SCV[X_1^{(2)}] + SCV[I_1^{(2)}]) \right) \\
&\quad + (1 - \rho_1^\Sigma) \rho_1^\Sigma - 1) + 1) \\
&\quad + (p_{32}^{(1)} \tau_3^{(1)} (p_{32}^{(1)} \cdot ((\rho_3^{\Sigma 2} SCV[S_3^\Sigma] + (1 - \rho_3^\Sigma) \cdot \\
&\quad \left(\frac{\lambda_0^{(1)} \tau_3^{(1)}}{\lambda_0^{(1)} \tau_3^{(1)} + \lambda_0^{(2)} \tau_3^{(2)}} \cdot \frac{E[X_3^{(1)}]}{b_3^{(1)}} (SCV[X_3^{(1)}] + SCV[I_3^{(1)}]) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda_0^{(2)} \tau_3^{(2)}}{\lambda_0^{(1)} \tau_3^{(1)} + \lambda_0^{(2)} \tau_3^{(2)}} \cdot \frac{E[X_3^{(2)}]}{b_3^{(2)}} (SCV[X_3^{(2)}] + SCV[I_3^{(2)}]) \right) \\
&\quad \left. + (1 - \rho_3^\Sigma) \rho_3^\Sigma - 1) + 1) \right) \\
&= \underline{\underline{0.449}} \\
SCV[I_2^{(2)}] &= (p_{12}^{(2)} \tau_1^{(2)} + p_{32}^{(2)} \tau_3^{(2)})^{-1} \cdot ((p_{12}^{(2)} \tau_1^{(2)} (p_{12}^{(2)} \cdot ((\rho_1^{\Sigma 2} SCV[S_1^\Sigma] + (1 - \rho_1^\Sigma) \cdot \\
&\quad \left(\frac{\lambda_0^{(1)} \tau_1^{(1)}}{\lambda_0^{(1)} \tau_1^{(1)} + \lambda_0^{(2)} \tau_1^{(2)}} \cdot \frac{E[X_1^{(1)}]}{b_1^{(1)}} (SCV[X_1^{(1)}] + SCV[I_1^{(1)}]) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda_0^{(2)} \tau_1^{(2)}}{\lambda_0^{(1)} \tau_1^{(1)} + \lambda_0^{(2)} \tau_1^{(2)}} \cdot \frac{E[X_1^{(2)}]}{b_1^{(2)}} (SCV[X_1^{(2)}] + SCV[I_1^{(2)}]) \right) \\
&\quad + (1 - \rho_1^\Sigma) \rho_1^\Sigma - 1) + 1) \\
&\quad + (p_{32}^{(1)} \tau_3^{(1)} (p_{32}^{(1)} \cdot ((\rho_3^{\Sigma 2} SCV[S_3^\Sigma] + (1 - \rho_3^\Sigma) \cdot \\
&\quad \left(\frac{\lambda_0^{(1)} \tau_3^{(1)}}{\lambda_0^{(1)} \tau_3^{(1)} + \lambda_0^{(2)} \tau_3^{(2)}} \cdot \frac{E[X_3^{(1)}]}{b_3^{(1)}} (SCV[X_3^{(1)}] + SCV[I_3^{(1)}]) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda_0^{(2)} \tau_3^{(2)}}{\lambda_0^{(1)} \tau_3^{(1)} + \lambda_0^{(2)} \tau_3^{(2)}} \cdot \frac{E[X_3^{(2)}]}{b_3^{(2)}} (SCV[X_3^{(2)}] + SCV[I_3^{(2)}]) \right) \\
&\quad \left. + (1 - \rho_3^\Sigma) \rho_3^\Sigma - 1) + 1) \right) \\
&= \underline{\underline{1.330}}
\end{aligned}$$

Zwischenergebnisse:

$$SCV[D_1] = \underline{\underline{1.009}}$$

$$SCV[D_2] = \underline{\underline{1.278}}$$

$$SCV[D_3] = \underline{\underline{1.575}}$$

Als Resultat ergibt sich

$$SCV[I_1^\Sigma] = \underline{\underline{0.276}} \qquad SCV[I_2^\Sigma] = \underline{\underline{1.952}} \qquad SCV[I_3^\Sigma] = \underline{\underline{1.902}}.$$

5 Evaluierung

5.1 Formulierung und Spezifikation der Simulationsmodelle

Die durchgeführte Simulationsstudie benutzt zwei Referenzmodelle. Das erste Modell bildet ein sechsstufiges Seriensystem mit drei Produktklassen. Ein Netz mit zwei Produktklassen ist Gegenstand des zweiten Referenzmodells. Das Seriensystem dient zur Beobachtung der Akkumulation des Fehlers der Approximation. Negative Auswirkungen veränderlicher Losgrößen und Nacharbeitsschleifen auf die approximativ berechneten Kennzahlen der Stationen und des Netzes sind Untersuchungsgegenstand des zweiten Referenzmodells.

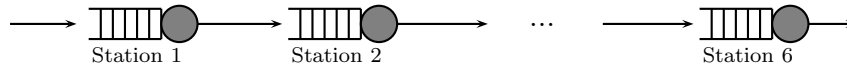


Abbildung 5.1: Referenzmodell 1

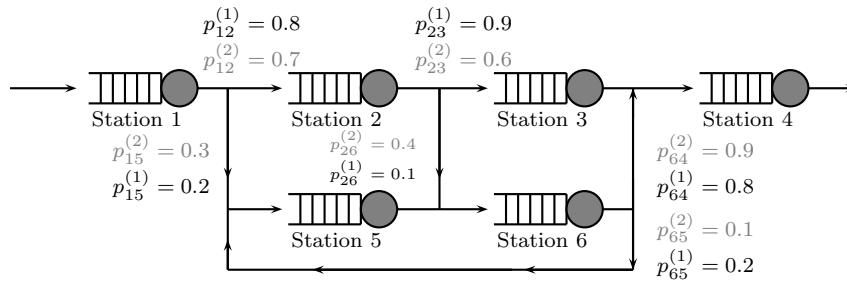


Abbildung 5.2: Referenzmodell 2

Es wurden je Referenzmodell 250 verschiedene Konfigurationen gerechnet und ausgewertet. Eine Auswahl von Konfigurationen befindet sich in den Abschnitten 5.4.2 und 5.4.3. Die ausgewählten Konfigurationen lassen sich in vier unterschiedliche Kategorien unterteilen. Die Kategorien ermöglichen eine Untersuchung der Verallgemeinerung der Dekomposition in verschiedenen Situationen. Modelle, die für die Produktklassen gleiche Werte der Losgrößen an einer Station besitzen, gehören den ersten zwei Kategorien an. Die Produktklassen unterscheiden sich durch verschiedene Bearbeitungszeiten an den Stationen und beanspruchen die Knoten unterschiedlich häufig. Modelle der letzten zwei Kategorien besitzen zusätzlich die Eigenschaft variierender Losgrößen der Produktklassen an einer Station. Das Charakteristikum der Modelle, die der Kategorie 1 und 3 angehören, ist gegeben durch die Zunahme der Losgrößen entlang des Materialflusses. Die Kategorien 2 und 4

besitzen dagegen Modelle mit fluktuierenden Losgrößen im Fertigungsverlauf. Es ist bekannt, dass wenn die mittlere Eingangsgruppengröße $E[X_i^{(k)}]$ größer ist als die Losgröße $b_i^{(k)}$ der zu bestimmende $SCV[I_i^\Sigma]$ erhöht ist und die Approximationen mittels der Formel von Allen und Cunneen anfällig für Fehler sind [HZ11].

Kategorie	Eigenschaften
1	$b_i^{(k)}$ für alle Produktklassen k an Station i gleich, $E[X_i^{(k)}] \leq b_i^{(k)}$
2	$b_i^{(k)}$ für alle Produktklassen k an Station i gleich, $E[X_i^{(k)}] > b_i^{(k)}$ und $E[X_i^{(k)}] \leq b_i^{(k)}$
3	$b_i^{(k)}$ für alle Produktklassen k an Station i verschieden, $E[X_i^{(k)}] \leq b_i^{(k)}$
4	$b_i^{(k)}$ für alle Produktklassen k an Station i verschieden, $E[X_i^{(k)}] > b_i^{(k)}$ und $E[X_i^{(k)}] \leq b_i^{(k)}$

Zu jeder Kategorie gehören fünf Simulationsmodelle, die sich in den spezifizierten quadrierten Variationskoeffizienten der Bedienzeiten unterscheiden.

Modell	$SCV[S_i^{(k)}]$
1	1.2
2	1.0
3	0.5
4	0
5	zufällig

Entsprechend ergeben sich 20 verschiedene Fälle je Referenzmodell. Die Parametrisierungen der einzelnen Modelle sowie die Wahl der zufälligen $SCV[S_i^{(k)}]$ befinden sich in den entsprechenden Abschnitten.

5.2 Simulation von offenen Warteschlangennetzen

Zur Realisierung der Simulationen wurde ein kommerzielles Simulationswerkzeug genutzt, das von Rockwell Automation entwickelt wurde. Arena (Version 14.7) ist ein führendes Software-Werkzeug auf dem Markt für diskrete ereignisorientierte Simulation und erfüllt alle Anforderungen, die durch die

Simulationsmodelle gestellt werden. Arena basiert auf den Simulationssprachen Siman/Cinema und hat seinen Ursprung in der Modellierung und Simulation von Geschäftsprozessen. Durch die graphische Oberfläche, in der Simulationsmodelle per “Drag&Drop” übersichtlich und zuverlässig konfiguriert werden können, ist ein hoher Komfort für den Anwender gegeben. Es existieren außerdem Schnittstellen, die zum Beispiel eine individuelle Datenaufzeichnung für statistische Auswertungen ermöglichen.

Ein weiterer Vorzug, den Arena bietet, ist die Unterscheidung von Prozessen und Ressourcen. Diese Unterscheidung ermöglicht, dass jede Produktklasse ein eigenes Netz erhält und sich die kongruenten Bedienstationen die Bediener (Ressourcen) teilen.

In die Dekompositionsmethode und die an den einzelnen Knoten verwendeten Approximationsformeln gehen nur das erste Moment und der quadrierte Variationskoeffizient der Verteilungen ein. Im Simulator hingegen muss die komplette Verteilungsinformation angegeben werden. Da die Gamma-Verteilung zwei Parameter benötigt, die sich aus den ersten zwei Momenten berechnen, wird diese als Referenzverteilung in den Simulationen verwendet.

Es besteht noch das Problem der Abbildung der allgemeinen Verteilungen der Zwischenankunfts- und Bedienzeiten im Simulator. Die beliebigen Verteilungen werden ausschließlich durch das erste Moment und den quadrierten Variationskoeffizienten spezifiziert. Für die Simulationen wurde als Referenzverteilung eine Gamma-Verteilung verwendet.

Das zur Dichtefunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\alpha x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

gehörende Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ heißt Gamma-Verteilung mit den Parametern $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ ($\text{Gamm}(\alpha, \beta)$). \mathcal{B} meint in diesem Zusammenhang die σ -Algebra der Borelschen Mengen. Die Gamma-Funktion Γ ist durch

$$\Gamma(\beta) := \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-x} dx$$

für $\beta > 0$ definiert.

Entsprechend gestalten sich die Parameter α und β für die zu simulierenden Bedienzeiten

$$\alpha_i^{(k)} = \frac{1}{\mu_i^{(k)}} SCV[S_i^{(k)}] \qquad \beta_i^{(k)} = \frac{1}{SCV[S_i^{(k)}]}$$

und für die Zwischenankunftszeiten der Eingangsknoten

$$\hat{\alpha}_i^{(k)} = \frac{1}{\lambda_i^{(k)}} SCV[I_i^{(k)}] \qquad \hat{\beta}_i^{(k)} = \frac{1}{SCV[I_i^{(k)}]}.$$

5.3 Statistische Methode der regenerativen stochastischen Prozesse

Die Theorie der regenerativen stochastischen Prozesse lässt sich zur Auswertung von Simulationen einsetzen. Die Methode, die beispielsweise in [AG07] beschrieben wird, besitzt den Vorteil, dass für die statistische Analyse nur ein Simulationslauf durchzuführen ist. Vorausgesetzt wird eine long-run Simulation, deren Dauer aufgrund des Satzes über die Grenzverteilung zeitstetiger regenerativer Prozesse ausreichend lang zu wählen ist.

Durch die beschriebenen Bedingungen in Definition 1 (Seite 46) zerfällt ein regenerativer stochastischer Prozess in aufeinanderfolgende Zyklen $((Z_{t+S_n})_{t \in T})$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, die identisch verteilt und stochastisch unabhängig sind. Es kann gezeigt werden, dass ein zeitstetiger regenerativer Prozess unter gewissen Bedingungen eine Grenzverteilung $Z_t \xrightarrow{d} Z^*$ besitzt und die Formel „Zeitmittel gleich Raummittel“ gilt (Gleichung (3.32)).

Da für stabile Warteschlangensysteme garantiert ist, dass sie mit Wahrscheinlichkeit 1 immer wieder leer laufen, kann der zugehörige Warteschlangenprozess als zeitstetiger regenerativer Prozess aufgefasst werden.

Im vorliegenden Fall wird die Zwischenankunftszeit der in das Warteschlangensystem neu eintretenden Aufträge als exponentiell verteilt angenommen. Dann sind die Zeitpunkte, zu denen das Warteschlangensystem leer läuft, Regenerationszeitpunkte für den Warteschlangenprozess, der die Anzahl Aufträge im Warteschlangensystem charakterisiert. Die exponentiell verteilten Zwischenankunftszeiten garantieren, dass die Zeiten zwischen Regenerationen nicht-arithmetisch verteilt sind und somit alle Voraussetzungen von Satz 4 und 5 erfüllt sind.

Punktschätzer

Um den Punktschätzer zu erhalten, muss das Problem der Schätzung von $r := E[f(Z^*)] := \lim_{t \rightarrow \infty} E[f(Z_t)]$ betrachtet werden. Durch Gleichung (3.32) ist dies gleichbedeutend mit der Schätzung von $E[X_1]/E[Y_1]$.

Aufgrund der Definition eines regenerativen stochastischen Prozesses ist bekannt, dass die Zufallsvektoren

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_3, Y_3), \dots$$

mit

$$X_j = \int_{S_{j-1}}^{S_j} f(Z_t) dt.$$

und $Y_j = S_j - S_{j-1}$, $j \in \mathbb{N}$, unabhängig und identisch verteilt sind. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschreibt die Zustände und $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Lebensdauern. Werden die arithmetischen Mittel

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \quad \text{und} \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j$$

gebildet und $E[X_1]$ beziehungsweise $E[Y_1]$ ersetzt, lässt sich ein geeigneter Punktschätzer r

$$r = \frac{\bar{X}}{\bar{Y}}$$

bestimmen.

Konfidenzintervall

Um ein Konfidenzintervall zum Punktschätzer r zu konstruieren sei zunächst $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine i. i. d. Folge mit $V_j = X_j - rY_j$, $j \in \mathbb{N}$. Der Erwartungswert ist

$$E[V_j] = E[X_j] - rE[Y_j] = 0$$

und die Varianz

$$\text{Var}[Y_j] = E[V_j^2] - E[V_j]^2 = E[V_j^2].$$

Im Folgenden wird $0 < \sigma^2 = \text{Var}[V_j] = E[V_j^2] < \infty$ angenommen und

$$V := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n V_j$$

gesetzt. Die Beziehung zwischen den Prozessen X_j und Y_j bezüglich des arithmetischen Mittels der Größen lässt sich beschreiben durch

$$\bar{V} = \bar{X} - r\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - rY_j).$$

Mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes lässt sich schließen, dass für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{n \cdot \bar{V} - n \cdot 0}{\sigma \cdot \sqrt{n}} \leq x\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\bar{V} \sqrt{n}}{\sigma} \leq x\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{(\bar{Y} - r\bar{Y})\sqrt{n}}{\sigma} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{(\hat{r} - r)\sqrt{n}}{\sigma/\bar{Y}} \leq x\right) = \Phi(x). \end{aligned}$$

Φ bezeichnet die Standardnormalverteilung und $\hat{r} := \bar{X}/\bar{Y}$ wurde als Schätzer für r verwendet. Man geht nun davon aus, dass der Fehler standardnormalverteilt ist. Für das $1 - \alpha$ Quantil der Standardnormalverteilung und $\Phi(z_0^*) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(-z_0^* \leq \frac{\sqrt{n}(\hat{r} - r)}{\sigma/\bar{X}} \leq z_0^*\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\hat{r} - \frac{z_0^* \sigma}{\bar{Y} \sqrt{n}} \leq r \leq \hat{r} + \frac{z_0^* \sigma}{\bar{Y} \sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - \Theta \end{aligned}$$

und es resultiert das Konfidenzintervall

$$KI = \left[\hat{r} - \frac{z_0^* \sigma}{\bar{Y} \sqrt{n}}, \hat{r} + \frac{z_0^* \sigma}{\bar{Y} \sqrt{n}} \right].$$

Die tatsächliche Standardabweichung σ^2 wird durch die Nutzung der empirischen Varianzen und der Kovarianz

$$\begin{aligned} s_{11}^2 &= \frac{1}{n-1} (X_j - \bar{X})^2, \\ s_{22}^2 &= \frac{1}{n-1} (Y_j - \bar{Y})^2, \\ s_{12}^2 &= \frac{1}{n-1} (X_j - \bar{X})(Y_j - \bar{Y}) \end{aligned}$$

durch

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[(X_1 - \Theta Y_1)^2] = Var[X_1] - 2\Theta Cov[X_1, Y_1] + \Theta^2 Var[Y_1] \\ &\approx s_{11} - 2\Theta s_{12} + \Theta^2 s_{22} \end{aligned}$$

geschätzt.

Die statistische Methode der regenerativen stochastischen Prozesse wurde implementiert und für die statistische Analyse der durchgeführten Experimente verwendet. Die Daten für die statistische Analyse wurden über eine Schnittstelle von Arena während der Simulationsläufe erhoben.

5.4 Analyse und Überprüfung der Simulations- und Approximationsergebnisse

Eine Grunderkenntnis aus der Untersuchung von offenen Warteschlangennetzen mit Batch Service im Ein-Produktfall [HZ11] war, dass die Genauigkeit der Approximationen fällt, wenn die quadrierten Variationskoeffizienten der Zwischenankunfts- und der Bedienzeiten hoch sind oder die mittlere Eingangsgruppengröße die Losgröße übersteigt. Letzteres hat zur Folge, dass sich an betroffenen Stationen eine Kaskade bildet und eine Wahrscheinlichkeitsmasse in der Null erzeugt wird. Dadurch handelt es sich nicht mehr um einen Erneuerungsprozess, der für die Dekompositionsmethode angenommen wird. Häufig führt die Verletzung dieser Voraussetzung dazu, dass die quadrierten Variationskoeffizienten der Zwischenankunftszeiten einen hohen Wert annehmen.

Die Untersuchung von einzelnen Warteschlangensystemen mit Batch Service im Mehr-Produktfall [Grö07] hatte ergeben, dass sich die Approximationen verschlechtern, wenn eine Kaskadenbildung für ein Warteschlangensystem vorliegt und die Anzahl Bediener erhöht wird. Eine Erhöhung der Abweichungen durch die Annahme verschiedener Verhältnisse der Auslastungen oder die Annahme unterschiedlicher Verteilungen der Eingangsgruppengröße für Produktklassen konnte nicht beobachtet werden.

Der relative Fehler an einer Station i der Produktklasse k eines Simulationsmodells n wird ermittelt durch

$$F_{i,n}^{(k)} = \frac{E[N_{i,n}^{(k)}] - \theta_{i,n}^{(k)}}{\theta_{i,n}^{(k)}} 100,$$

wobei θ den korrespondierenden Punktschätzer beschreibt. Als Maß für die Zuverlässigkeit des Punktschätzers wurde das Konfidenzintervall für diesen zum Niveau $z^* = 0.1$ gewählt. Die Simulationsmodelle wurden mit 500.000 Zeiteinheiten simuliert. Simulationsmodelle, die deterministische Bedienzeiten beinhalten, wurden in Arena durch Konstanten realisiert.

5.4.1 Zusammenfassung der Simulations- und Approximationsergebnisse

Die Evaluierung der verallgemeinerten Dekomposition wurde an einem Seriensystem und an einem Netzwerk durchgeführt. Die Referenzmodelle bestehen jeweils aus sechs Knoten beziehungsweise Stationen, die Gruppenankünfte und -bedienung mit allgemeinen Verteilungen besitzen. Da diese Art von Warteschlangennetzen keine exakten analytischen Lösungen besitzen, wird

die approximative Methode der Dekomposition mit ereignisorientierter stochastischer Simulation verglichen.

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Evaluierung kurz zusammengefasst und die einzelnen Kategorien auf den nächsten Seiten detailliert ausgewertet. Die Simulations- und Approximationsergebnisse der Modelle wurden graphisch aufbereitet. Die Balken repräsentieren die Approximationsergebnisse der Produktklassen an einer Station i . Die schwarzen Balken stehen für die erste, die weißen für die zweite und die grauen für die dritte Produktklasse. Die blauen Rauten repräsentieren die berechneten Schätzer aus der Simulation.

5.4.2 Seriensystem

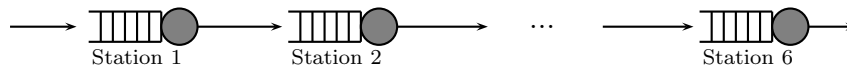


Abbildung 5.1: Referenzmodell 1

Serie – 3 Produktklassen – Modelle 1-20												
Modelle	Knoten i	c_i	ρ_i^Σ	Produktklasse								
				1			2			3		
				$b_i^{(1)}$	$\mu_i^{(1)}$	$\rho_i^{(1)}$	$b_i^{(2)}$	$\mu_i^{(2)}$	$\rho_i^{(2)}$	$b_i^{(3)}$	$\mu_i^{(3)}$	$\rho_i^{(3)}$
1-5	1	1	0.8	2	1.25	0.4	2	2.5	0.2	2	2.5	0.2
	2	3	0.9	4	0.28	0.3	4	0.278	0.3	4	0.28	0.3
	3	1	0.6	5	2	0.1	5	0.5	0.4	5	2	0.1
	4	5	0.8	7	0.07	0.4	7	0.286	0.1	7	0.1	0.3
	5	1	0.5	8	0.63	0.2	8	0.625	0.2	8	1.25	0.1
	6	2	0.7	10	0.17	0.3	10	0.167	0.3	10	0.5	0.1
6-10	1	1	0.8	4	0.63	0.4	4	1.25	0.2	4	1.25	0.2
	2	3	0.9	5	0.22	0.3	5	0.222	0.3	5	0.22	0.3
	3	1	0.6	1	10	0.1	1	2.5	0.4	1	10	0.1
	4	5	0.8	7	0.07	0.4	7	0.286	0.1	7	0.1	0.3
	5	1	0.5	3	1.67	0.2	3	1.667	0.2	3	3.33	0.1
	6	2	0.7	10	0.17	0.3	10	0.167	0.3	10	0.5	0.1
11-15	1	1	0.8	2	1.25	0.4	1	5	0.2	3	1.67	0.2
	2	3	0.9	4	0.28	0.3	3	0.37	0.3	5	0.22	0.3
	3	1	0.6	5	2	0.1	6	0.417	0.4	7	1.43	0.1
	4	5	0.8	7	0.07	0.4	8	0.25	0.1	10	0.07	0.3
	5	1	0.5	8	0.63	0.2	9	0.556	0.2	11	0.91	0.1
	6	2	0.7	10	0.17	0.3	12	0.139	0.3	13	0.38	0.1
16-20	1	1	0.8	3	0.83	0.4	2	2.5	0.2	1	5	0.2
	2	3	0.9	10	0.11	0.3	10	0.11	0.3	10	0.11	0.3
	3	1	0.6	5	2	0.1	7	0.36	0.4	3	3.333	0.1
	4	5	0.8	15	0.03	0.4	15	0.13	0.1	15	0.04	0.3
	5	1	0.5	2	2.5	0.2	1	5	0.2	3	3.33	0.1
	6	2	0.7	1	1.67	0.3	1	1.67	0.3	1	5	0.1

Tabelle 5.1: Serie – 3 Produktklassen – Simulationsmodelle 1-20

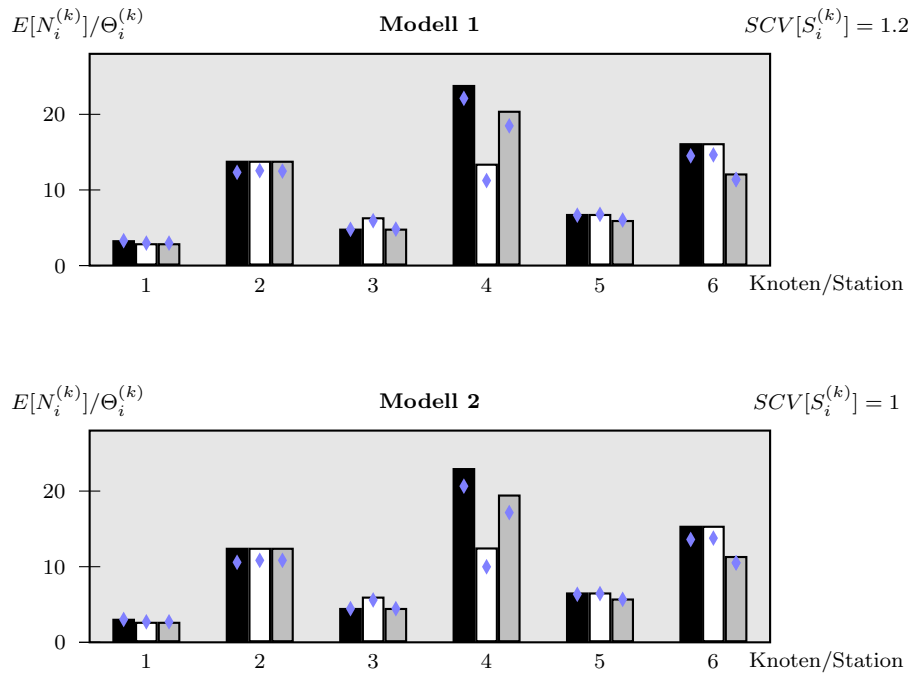
quadrierte Variationskoeffizienten der Bedienzeiten				
Modell	Knoten i	$SCV[S_i^{(1)}]$	$SCV[S_i^{(2)}]$	$SCV[S_i^{(3)}]$
5	1	1.051	1.076	0.143
	2	0.550	0.275	1.064
	3	0.704	0.515	0.136
	4	0.676	0.549	0.991
	5	0.170	0.738	0.254
	6	1.117	0.695	1.073
10	1	0.820	1.051	1.044
	2	0.218	0.193	0.574
	3	0.441	0.914	0.396
	4	0.630	0.447	0.450
	5	1.069	0.327	0.628
	6	0.977	0.136	0.946
15	1	0.713	0.140	0.759
	2	0.255	0.211	0.860
	3	0.879	1.169	0.194
	4	0.415	0.489	0.313
	5	1.149	0.122	0.732
	6	0.414	0.574	0.164
20	1	0.367	1.030	0.426
	2	0.785	0.355	0.479
	3	0.105	0.436	1.049
	4	0.619	0.416	0.969
	5	0.487	0.846	0.272
	6	1.137	0.301	0.608

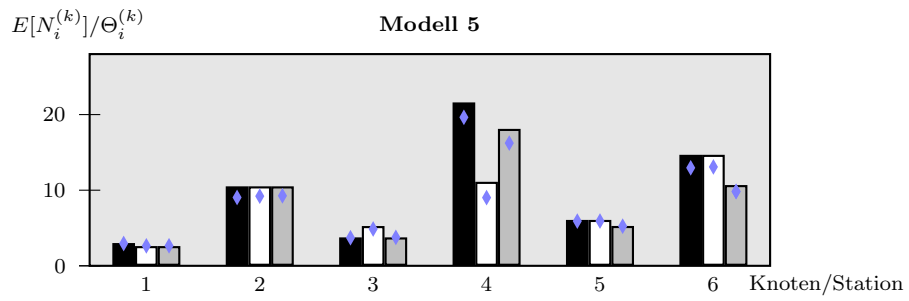
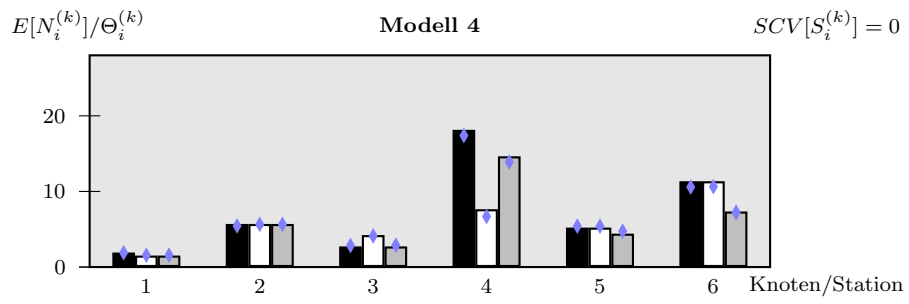
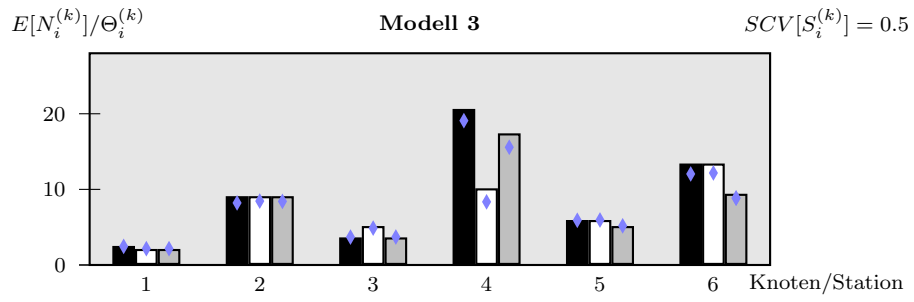
Tabelle 5.2: Serie - 3 Produktklassen – quadrierte Variationskoeffizienten der Bedienzeiten

Simulationsmodelle 1-5 – Serie – 3 Produktklassen														
Modell	Knoten i	Diskrete ereignisorientierte Simulation						Approximation						
		Produktklasse						Produktklasse						
		1		2		3		$SCV[I_i^\Sigma]$	1		2		3	
		$\Theta_i^{(1)}$	90% KI	$\Theta_i^{(2)}$	90% KI	$\Theta_i^{(3)}$	90% KI		$E[N_i^1]$	$F_i^{(1)}$	$E[N_i^2]$	$F_i^{(2)}$	$E[N_i^3]$	$F_i^{(3)}$
1	1	3.29	[3.24,3.33]	2.97	[2.92,3.01]	2.97	[2.93,3.02]	0.5	3.36	2.1	2.96	-0.3	2.96	-0.3
	2	12.33	[11.92,12.73]	12.55	[12.14,12.95]	12.49	[12.08,12.89]	0.6	13.87	12.5	13.87	10.5	13.87	11.1
	3	4.79	[4.74,4.85]	5.93	[5.88,5.99]	4.82	[4.77,4.87]	0.9	4.89	2.1	6.39	7.8	4.89	1.5
	4	22.11	[21.77,22.45]	11.24	[10.99,11.49]	18.48	[18.19,18.77]	1.02	23.98	8.5	13.48	19.9	20.48	10.8
	5	6.66	[6.61,6.7]	6.77	[6.72,6.82]	6.02	[5.98,6.07]	1.26	6.83	2.6	6.83	0.9	6.03	0.2
	6	14.51	[14.3,14.72]	14.64	[14.44,14.85]	11.38	[11.19,11.57]	0.98	16.19	11.6	16.19	10.6	12.19	7.1
2	1	3.02	[2.98,3.06]	2.71	[2.68,2.75]	2.71	[2.67,2.75]	0.5	3.12	3.3	2.72	0.4	2.72	0.4
	2	10.58	[10.31,10.86]	10.84	[10.56,11.12]	10.84	[10.56,11.12]	0.53	12.51	18.2	12.51	15.4	12.51	15.4
	3	4.45	[4.41,4.49]	5.6	[5.55,5.65]	4.45	[4.41,4.49]	0.76	4.55	2.3	6.05	8	4.55	2.3
	4	20.65	[20.42,20.88]	9.99	[9.82,10.15]	17.16	[16.96,17.37]	0.9	23.05	11.6	12.55	25.6	19.55	13.9
	5	6.35	[6.31,6.39]	6.44	[6.41,6.48]	5.68	[5.65,5.71]	1.1	6.6	3.9	6.6	2.5	5.8	2.1
	6	13.6	[13.44,13.75]	13.78	[13.62,13.93]	10.51	[10.37,10.65]	0.87	15.42	13.4	15.42	11.9	11.42	8.7
3	1	2.46	[2.44,2.48]	2.16	[2.14,2.18]	2.16	[2.13,2.18]	0.5	2.52	2.4	2.12	-1.9	2.12	-1.9
	2	8.21	[8.03,8.39]	8.45	[8.27,8.63]	8.41	[8.23,8.59]	0.35	9.1	10.8	9.1	7.7	9.1	8.2
	3	3.69	[3.67,3.7]	4.88	[4.85,4.9]	3.7	[3.68,3.72]	0.42	3.65	-1.1	5.15	5.5	3.65	-1.4
	4	19.09	[18.97,19.22]	8.35	[8.27,8.42]	15.57	[15.46,15.67]	0.61	20.64	8.1	10.14	21.4	17.14	10.1
	5	5.91	[5.88,5.93]	5.95	[5.93,5.97]	5.18	[5.16,5.2]	0.71	5.95	0.7	5.95	0	5.15	-0.6
	6	12.04	[11.96,12.11]	12.17	[12.09,12.25]	8.85	[8.79,8.92]	0.61	13.42	11.5	13.42	10.3	9.42	6.4
4	1	1.89	[1.88,1.9]	1.57	[1.56,1.58]	1.57	[1.56,1.58]	0.5	1.92	1.6	1.52	-3.2	1.52	-3.2
	2	5.45	[5.42,5.48]	5.65	[5.61,5.68]	5.65	[5.61,5.68]	0.17	5.7	4.6	5.7	0.9	5.7	0.9
	3	2.85	[2.84,2.85]	4.12	[4.11,4.12]	2.89	[2.88,2.89]	0.09	2.73	-4.2	4.23	2.7	2.73	-5.5
	4	17.39	[17.34,17.43]	6.69	[6.68,6.7]	13.9	[13.88,13.93]	0.32	18.15	4.4	7.65	14.4	14.65	5.4
	5	5.42	[5.41,5.43]	5.4	[5.39,5.41]	4.75	[4.74,4.76]	0.32	5.22	-3.7	5.22	-3.3	4.42	-7
	6	10.58	[10.56,10.6]	10.63	[10.6,10.65]	7.22	[7.2,7.24]	0.34	11.35	7.3	11.35	6.8	7.35	1.8
5	1	2.95	[2.92,2.99]	2.64	[2.61,2.68]	2.65	[2.61,2.69]	0.5	3.01	2	2.61	-1.2	2.61	-1.5
	2	9.04	[8.85,9.23]	9.21	[9.01,9.4]	9.26	[9.07,9.46]	0.5	10.51	16.3	10.51	14.1	10.51	13.5
	3	3.71	[3.69,3.73]	4.87	[4.84,4.89]	3.76	[3.74,3.78]	0.52	3.76	1.4	5.26	8	3.76	0
	4	19.64	[19.47,19.81]	9.02	[8.9,9.15]	16.23	[16.06,16.4]	0.64	21.61	10	11.11	23.2	18.11	11.6
	5	5.91	[5.89,5.94]	5.92	[5.89,5.94]	5.24	[5.22,5.26]	0.91	6.07	2.7	6.07	2.5	5.27	0.6
	6	12.96	[12.82,13.09]	13.08	[12.96,13.2]	9.83	[9.72,9.95]	0.67	14.68	13.3	14.68	12.2	10.68	8.7

Tabelle 5.3: Ergebnisse - Simulationsmodelle 1-5: $\lambda_0^{(1)} = 1$, $\lambda_0^{(2)} = 1$, $\lambda_0^{(3)} = 1$, $SCV[I_0^{(1)}] = 1$, $SCV[I_0^{(2)}] = 1$, $SCV[I_0^{(3)}] = 1$, $b_0^{(1)} = 1$, $b_0^{(2)} = 1$, $b_0^{(3)} = 1$.

Zusammengefasst erzielen alle Modelle des Seriensystems der ersten Kategorie große Übereinstimmungen zwischen Simulationenwerten und Approximationen. Die zwischen den Produktklassen variierenden Auslastungen an einer Station wirken sich kaum negativ auf die Approximationsergebnisse aus. Die Approximationsgüte wird durch die mittlere Gesamtauslastung, die für Station 5 angenommen wurde ($\rho_5^\Sigma = 0.5$), ebenfalls nicht gemindert. Jedoch ist ein negativer Effekt an Stationen beobachtbar, die Mehrbedienersysteme repräsentieren. Das betrifft die Stationen 2, 4 und 6. Die berechneten Kennzahlen für die genannten Stationen besitzen eine größere Differenz zu den Simulationenwerten. Eine Verringerung der Approximationsgüte für Mehrbedienersystemen wurde zuvor in [Gr07] festgestellt. Das Modell, das deterministisch verteilte Bedienzeiten beinhaltet ($SCV[S_i^{(k)}] = 0$), besitzt die größten Übereinstimmungen und die niedrigste Approximationsgüte besitzt das Modell mit exponentiell verteilten Bedienzeiten ($SCV[S_i^{(k)}] = 1$).

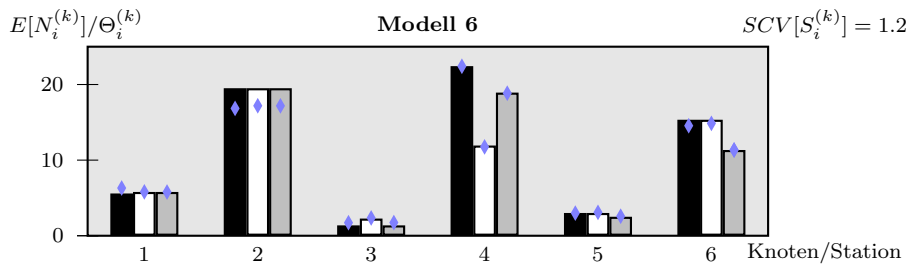


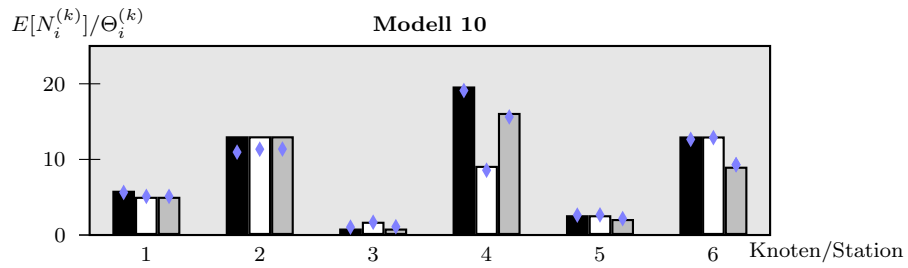
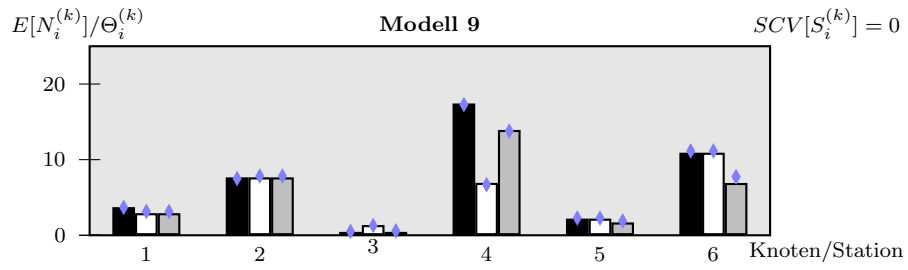
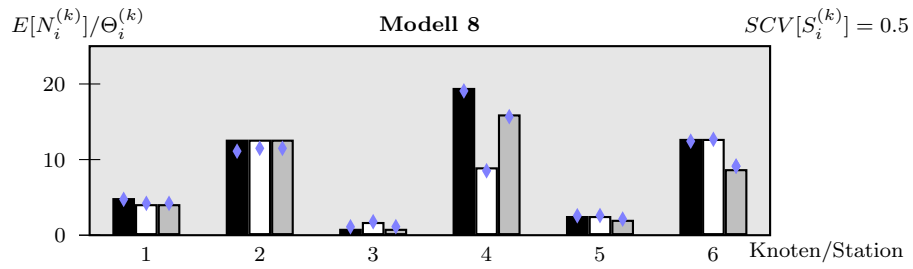
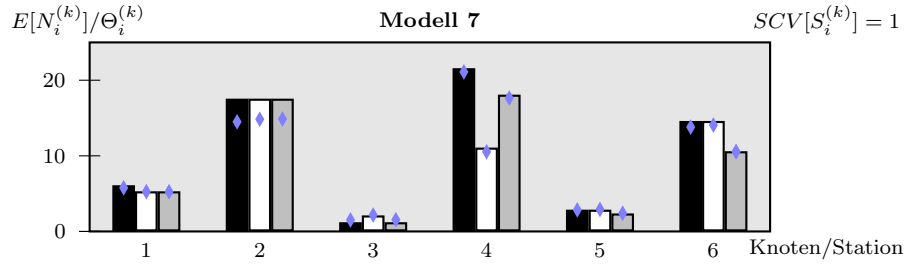


Simulationsmodelle 6-10 – Serie – 3 Produktklassen														
Modell	Knoten i	Diskrete ereignisorientierte Simulation						Approximation						
		Produktklasse						Produktklasse						
		1		2		3		$SCV[I_i^{\Sigma}]$	1		2		3	
		$\Theta_i^{(1)}$	90% KI	$\Theta_i^{(2)}$	90% KI	$\Theta_i^{(3)}$	90% KI		$E[N_i^1]$	$F_i^{(1)}$	$E[N_i^2]$	$F_i^{(2)}$	$E[N_i^3]$	$F_i^{(3)}$
6	1	6.31	[6.2,6.42]	5.8	[5.69,5.91]	5.78	[5.67,5.89]	0.25	6.59	4.4	5.79	-0.2	5.79	0.2
	2	16.84	[16.28,17.39]	17.19	[16.63,17.75]	17.18	[16.63,17.74]	0.92	19.51	15.9	19.51	13.5	19.51	13.6
	3	1.72	[1.7,1.74]	2.35	[2.33,2.38]	1.74	[1.71,1.76]	5.77	1.37	-20.3	2.27	-3.4	1.37	-21.3
	4	22.41	[22.05,22.77]	11.75	[11.44,12.05]	18.85	[18.51,19.18]	0.48	22.43	0.1	11.93	1.5	18.93	0.4
	5	2.99	[2.97,3.02]	3.09	[3.06,3.12]	2.58	[2.56,2.6]	3.11	3.01	0.7	3.01	-2.6	2.51	-2.7
	6	14.55	[14.36,14.75]	14.86	[14.66,15.07]	11.34	[11.15,11.52]	0.64	15.34	5.4	15.34	3.2	11.34	0
7	1	5.77	[5.69,5.86]	5.26	[5.18,5.34]	5.26	[5.18,5.34]	0.25	6.11	5.9	5.31	1	5.31	1
	2	14.5	[14.06,14.94]	14.84	[14.4,15.27]	14.87	[14.43,15.31]	0.81	17.56	21.1	17.56	18.3	17.56	18.1
	3	1.52	[1.51,1.54]	2.17	[2.15,2.19]	1.55	[1.53,1.56]	4.9	1.22	-19.7	2.12	-2.3	1.22	-21.3
	4	21.1	[20.84,21.36]	10.53	[10.33,10.74]	17.65	[17.41,17.89]	0.42	21.59	2.3	11.09	5.3	18.09	2.5
	5	2.85	[2.83,2.87]	2.91	[2.89,2.93]	2.42	[2.4,2.44]	2.71	2.88	1.1	2.88	-1	2.38	-1.7
	6	13.8	[13.65,13.95]	14.07	[13.93,14.22]	10.55	[10.42,10.68]	0.57	14.61	5.9	14.61	3.8	10.61	0.6
8	1	4.74	[4.69,4.79]	4.21	[4.17,4.26]	4.21	[4.17,4.25]	0.25	4.91	3.6	4.11	-2.4	4.11	-2.4
	2	11.11	[10.88,11.33]	11.49	[11.26,11.72]	11.49	[11.27,11.72]	0.52	12.64	13.8	12.64	10	12.64	10
	3	1.11	[1.1,1.12]	1.78	[1.77,1.8]	1.13	[1.12,1.14]	2.74	0.85	-23.4	1.75	-1.7	0.85	-24.8
	4	19.08	[18.95,19.2]	8.52	[8.44,8.6]	15.68	[15.56,15.79]	0.25	19.48	2.1	8.98	5.4	15.98	1.9
	5	2.57	[2.56,2.59]	2.6	[2.59,2.61]	2.13	[2.12,2.14]	1.73	2.54	-1.2	2.54	-2.3	2.04	-4.2
	6	12.43	[12.35,12.51]	12.68	[12.6,12.76]	9.13	[9.07,9.2]	0.38	12.74	2.5	12.74	0.5	8.74	-4.3
9	1	3.69	[3.68,3.71]	3.15	[3.14,3.16]	3.14	[3.13,3.15]	0.25	3.72	0.8	2.92	-7.3	2.92	-7
	2	7.5	[7.46,7.53]	7.84	[7.8,7.88]	7.84	[7.8,7.88]	0.23	7.66	2.1	7.66	-2.3	7.66	-2.3
	3	0.51	[0.51,0.52]	1.29	[1.28,1.29]	0.59	[0.58,0.59]	0.57	0.45	-11.8	1.35	4.7	0.45	-23.7
	4	17.28	[17.24,17.32]	6.69	[6.68,6.7]	13.78	[13.76,13.81]	0.09	17.43	0.9	6.93	3.6	13.93	1.1
	5	2.28	[2.27,2.28]	2.27	[2.27,2.28]	1.89	[1.89,1.9]	0.74	2.2	-3.5	2.2	-3.1	1.7	-10.1
	6	11.16	[11.14,11.18]	11.16	[11.14,11.18]	7.74	[7.72,7.76]	0.19	10.92	-2.2	10.92	-2.2	6.92	-10.6
10	1	5.63	[5.55,5.71]	5.11	[5.03,5.18]	5.11	[5.04,5.19]	0.25	5.86	4.1	5.06	-1	5.06	-1
	2	10.96	[10.78,11.14]	11.35	[11.17,11.53]	11.37	[11.18,11.56]	0.75	13.06	19.2	13.06	15.1	13.06	14.9
	3	1.04	[1.04,1.05]	1.69	[1.67,1.7]	1.1	[1.09,1.11]	2.15	0.86	-17.3	1.76	4.1	0.86	-21.8
	4	19.11	[18.95,19.28]	8.57	[8.47,8.67]	15.62	[15.5,15.75]	0.25	19.65	2.8	9.15	6.8	16.15	3.4
	5	2.63	[2.61,2.64]	2.66	[2.64,2.67]	2.17	[2.16,2.18]	1.84	2.62	-0.4	2.62	-1.5	2.12	-2.3
	6	12.65	[12.54,12.76]	12.88	[12.79,12.96]	9.3	[9.22,9.38]	0.41	13.04	3.1	13.04	1.2	9.04	-2.8

Tabelle 5.4: Ergebnisse - Simulationsmodelle 6-10: $\lambda_0^{(1)} = 1$, $\lambda_0^{(2)} = 1$, $\lambda_0^{(3)} = 1$, $SCV[I_0^{(1)}] = 1$, $SCV[I_0^{(2)}] = 1$, $SCV[I_0^{(3)}] = 1$, $b_0^{(1)} = 1$, $b_0^{(2)} = 1$, $b_0^{(3)} = 1$.

Zusammengefasst besitzen alle Modelle des Seriensystems der zweiten Kategorie akzeptable Übereinstimmungen zwischen Simulationenwerten und Approximationsergebnissen. Es lassen sich zwei Phänomene beobachten, die höhere Abweichungen verursachen. Zum einen wird die Approximationsgüte für Stationen gemindert, die Mehrbedienersysteme repräsentieren. Das lässt sich durchgängig für alle Modelle für die zweite Station beobachten. Zum anderen treten Abweichungen auf, wenn sich an einer Station Kaskaden bilden [HZ11]. Kaskaden entstehen an Stationen, an denen die mittlere Eingangsgruppengröße die Losgröße des Bedieners übersteigt. Diese Situation lässt sich für die dritte Station feststellen ($E[X_3^{(k)}] = 5 > b_3^{(k)} = 1$). Ein Indikator für eine Kaskadenbildung sind vergleichsweise hohe Variationskoeffizienten der Zwischenankunftszeiten ($SCV[I_i^\Sigma] > 1.25$). Die beschriebenen Phänomene und die zu erwartenden Abweichungen sind kaum für die Stationen 4, 5 und 6 zu beobachten. Es wurde erwartet, dass die Kaskadenbildung die Approximationsgüte für die fünfte Station verringert ($E[X_5^{(k)}] = 7 > b_5^{(k)} = 3$) und die angenommenen Mehrbedienersysteme einen negativen Einfluss auf die Ergebnisse der Stationen 4 und 6 haben. Die Approximationen stabilisieren sich jedoch ab Station 3 für die nachfolgenden Stationen. Ebenfalls kann nicht beobachtet werden, dass die Approximationsgüte signifikant vermindert wird, wenn eine mittlere Gesamtauslastung angenommen wird wie es für Station 5 der Fall ist ($\rho_5^\Sigma = 0.5$). Die angenommenen unterschiedlichen Auslastungen der Produktklassen für eine Station i führt ebenfalls kaum zu höheren Abweichungen. Die größten Übereinstimmungen zwischen Approximationen und Simulationenwerten erzielt das Modell mit deterministischen Bedienzeiten ($SCV[S_i^{(k)}] = 0$) und die niedrigsten Übereinstimmungen der Kennzahlen besitzt wieder das Modell mit exponentiell verteilten Bedienzeiten ($SCV[S_i^{(k)}] = 1$).

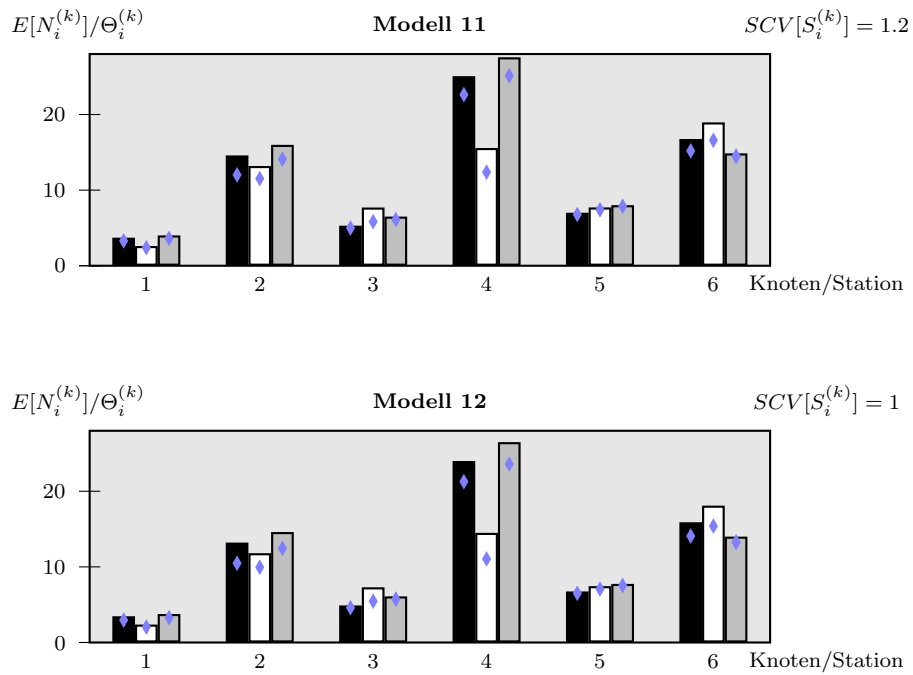


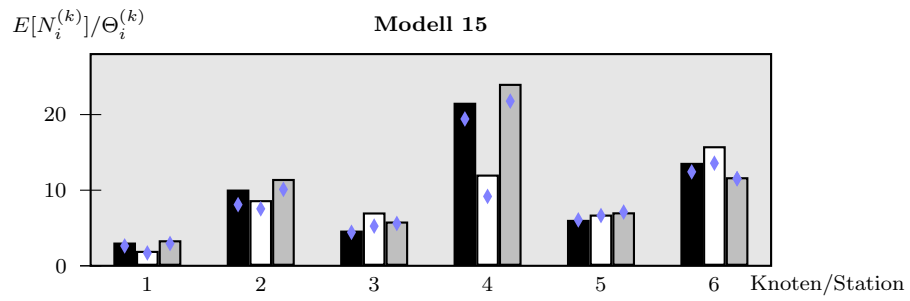
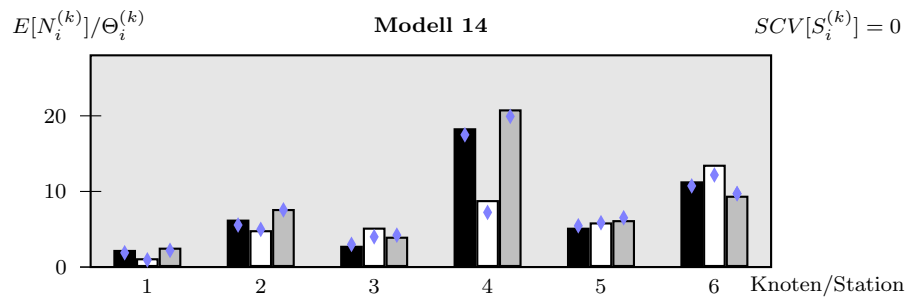
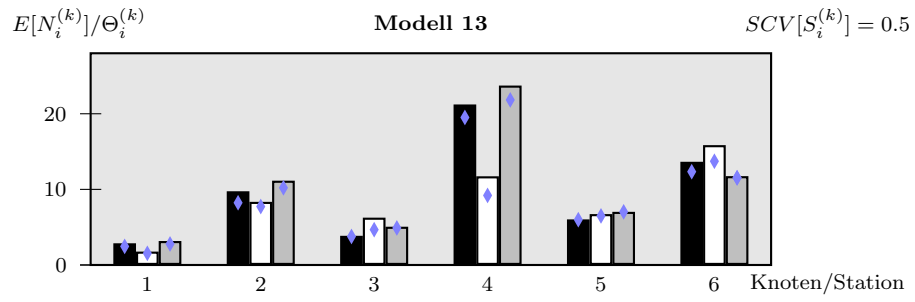


Simulationsmodelle 11-15 – Serie – 3 Produktklassen														
Modell	Knoten i	Diskrete ereignisorientierte Simulation						Approximation						
		Produktklasse						Produktklasse						
		1		2		3		$SCV[I_i^\Sigma]$	1		2		3	
		$\Theta_i^{(1)}$	90% KI	$\Theta_i^{(2)}$	90% KI	$\Theta_i^{(3)}$	90% KI		$E[N_i^1]$	$F_i^{(1)}$	$E[N_i^2]$	$F_i^{(2)}$	$E[N_i^3]$	$F_i^{(3)}$
11	1	3.29	[3.24,3.34]	2.39	[2.34,2.44]	3.62	[3.57,3.67]	0.74	3.71	12.8	2.61	9.2	4.01	10.8
	2	12.02	[11.61,12.42]	11.53	[11.12,11.93]	14.1	[13.68,14.53]	0.73	14.59	21.4	13.19	14.4	15.99	13.4
	3	4.99	[4.93,5.05]	5.83	[5.76,5.9]	6.11	[6.05,6.17]	0.82	5.3	6.2	7.7	32.1	6.5	6.4
	4	22.63	[22.23,23.03]	12.38	[12.03,12.72]	25.13	[24.74,25.52]	1.03	25.07	10.8	15.57	25.8	27.57	9.7
	5	6.78	[6.73,6.83]	7.4	[7.35,7.45]	7.87	[7.82,7.92]	1.27	7.01	3.4	7.71	4.2	8.01	1.8
	6	15.19	[14.96,15.43]	16.59	[16.35,16.84]	14.48	[14.26,14.71]	0.96	16.76	10.3	18.96	14.3	14.86	2.6
12	1	2.96	[2.92,3]	2.04	[2.01,2.08]	3.28	[3.24,3.31]	0.74	3.47	17.2	2.37	16.2	3.77	14.9
	2	10.48	[10.18,10.78]	9.95	[9.64,10.26]	12.45	[12.14,12.75]	0.65	13.21	26.1	11.81	18.7	14.61	17.4
	3	4.6	[4.56,4.65]	5.46	[5.41,5.51]	5.74	[5.7,5.79]	0.7	4.9	6.5	7.3	33.7	6.1	6.3
	4	21.28	[21.02,21.54]	11.05	[10.84,11.26]	23.6	[23.33,23.87]	0.91	24	12.8	14.5	31.2	26.5	12.3
	5	6.51	[6.46,6.55]	7.07	[7.03,7.11]	7.54	[7.5,7.58]	1.11	6.75	3.7	7.45	5.4	7.75	2.8
	6	14.08	[13.91,14.26]	15.4	[15.21,15.58]	13.27	[13.11,13.43]	0.85	15.9	12.9	18.1	17.5	14	5.5
13	1	2.46	[2.44,2.49]	1.54	[1.52,1.57]	2.78	[2.76,2.8]	0.74	2.87	16.7	1.77	14.9	3.17	14
	2	8.23	[8.07,8.4]	7.73	[7.57,7.9]	10.21	[10.04,10.38]	0.45	9.75	18.5	8.35	8	11.15	9.2
	3	3.77	[3.75,3.79]	4.67	[4.64,4.7]	4.9	[4.88,4.92]	0.4	3.86	2.4	6.26	34.1	5.06	3.3
	4	19.51	[19.35,19.66]	9.2	[9.09,9.31]	21.83	[21.67,21.99]	0.63	21.23	8.8	11.73	27.5	23.73	8.7
	5	5.99	[5.96,6.01]	6.49	[6.46,6.51]	7.03	[7.7,06]	0.71	6.03	0.7	6.73	3.7	7.03	0
	6	12.34	[12.25,12.42]	13.72	[13.62,13.81]	11.53	[11.45,11.61]	0.59	13.65	10.6	15.85	15.5	11.75	1.9
14	1	1.89	[1.88,1.9]	0.95	[0.94,0.96]	2.21	[2.2,2.22]	0.74	2.27	20.1	1.17	23.2	2.57	16.3
	2	5.56	[5.53,5.59]	4.98	[4.94,5.01]	7.56	[7.53,7.6]	0.25	6.28	13	4.88	-2	7.68	1.6
	3	3	[2.99,3]	4	[4,4.01]	4.22	[4.21,4.22]	0.1	2.82	-6	5.22	30.5	4.02	-4.7
	4	17.49	[17.45,17.54]	7.23	[7.22,7.24]	19.93	[19.9,19.97]	0.34	18.36	5	8.86	22.6	20.86	4.7
	5	5.46	[5.45,5.47]	5.86	[5.85,5.87]	6.52	[6.51,6.54]	0.32	5.21	-4.6	5.91	0.9	6.21	-4.8
	6	10.73	[10.71,10.75]	12.18	[12.16,12.21]	9.71	[9.68,9.73]	0.33	11.34	5.7	13.54	11.2	9.44	-2.8
15	1	2.63	[2.61,2.66]	1.7	[1.68,1.73]	2.95	[2.92,2.98]	0.74	3.08	17.1	1.98	16.5	3.38	14.6
	2	8.09	[7.95,8.23]	7.54	[7.4,7.68]	10.11	[9.95,10.26]	0.52	10.09	24.7	8.69	15.3	11.49	13.7
	3	4.43	[4.38,4.47]	5.25	[5.2,5.31]	5.6	[5.55,5.65]	0.41	4.66	5.2	7.06	34.5	5.86	4.6
	4	19.42	[19.29,19.55]	9.18	[9.11,9.26]	21.78	[21.66,21.9]	0.86	21.57	11.1	12.07	31.5	24.07	10.5
	5	6.07	[6.04,6.1]	6.65	[6.62,6.67]	7.11	[7.08,7.14]	0.67	6.08	0.2	6.78	2	7.08	-0.4
	6	12.43	[12.34,12.51]	13.57	[13.47,13.66]	11.52	[11.44,11.59]	0.6	13.62	9.6	15.82	16.6	11.72	1.7

Tabelle 5.5: Ergebnisse - Simulationsmodelle 11-15: $\lambda_0^{(1)} = 1$, $\lambda_0^{(2)} = 1$, $\lambda_0^{(3)} = 1$, $SCV[I_0^{(1)}] = 1$, $SCV[I_0^{(2)}] = 1$, $SCV[I_0^{(3)}] = 1$, $b_0^{(1)} = 1$, $b_0^{(2)} = 1$, $b_0^{(3)} = 1$.

Die Approximationsergebnisse der Modelle des Seriensystems der dritten Kategorie besitzen akzeptable Übereinstimmungen zu den Simulationenwerten. Variierende Auslastungen zwischen den Produktklassen und die angenommenen unterschiedlichen Batchbediengrößen an einer Station beeinflussen die Approximationen stärker verglichen mit Modellen der ersten Kategorie. Die angenommene mittlere Gesamtauslastung an der fünften Station ($\rho_5^\Sigma = 0.5$) hingegen mindert die Approximationsgüte nicht. Die höheren Abweichungen für die Stationen 2, 4 und 6 lassen sich auf die angenommenen Mehrbedienersysteme zurückführen. Die größten Übereinstimmungen zwischen Approximationen und Simulationenwerten besitzt das Modell mit deterministischen Bedienzeiten ($SCV[S_i^{(k)}] = 0$) und die niedrigste Approximationsgüte hat das Modell mit exponentiell verteilten Bedienzeiten ($SCV[S_i^{(k)}] = 1$).

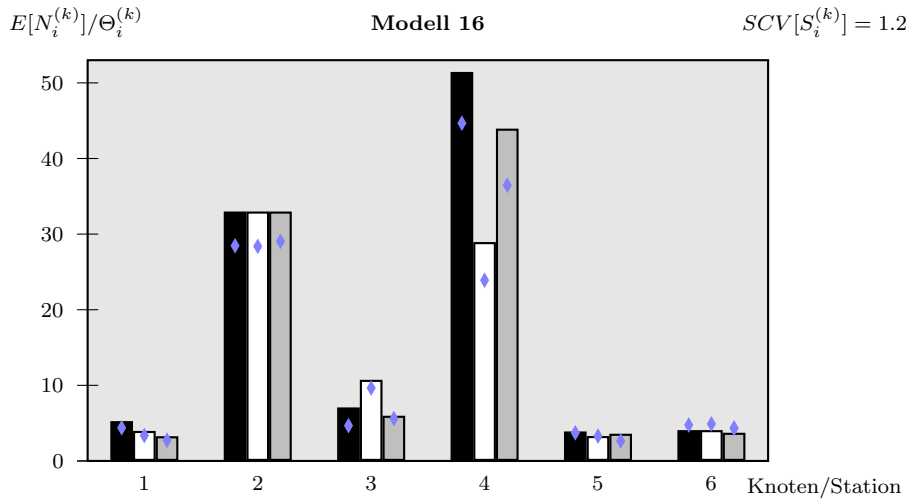


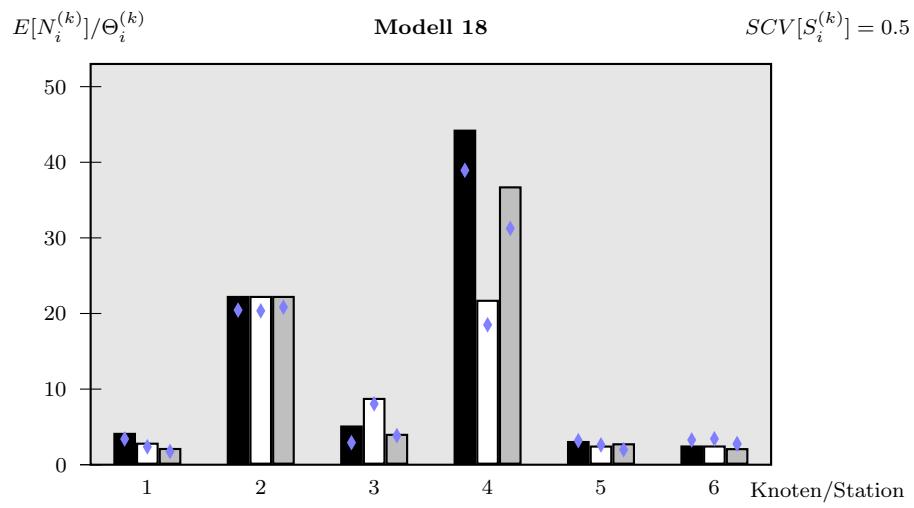
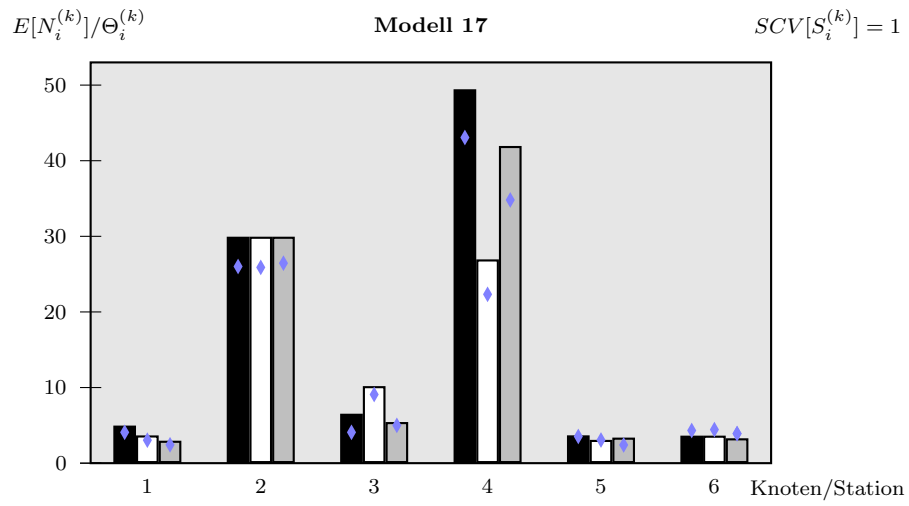


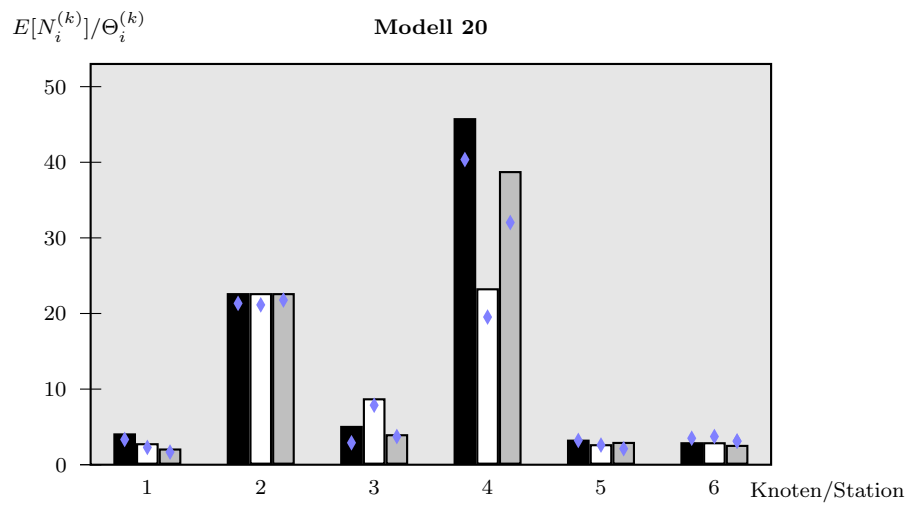
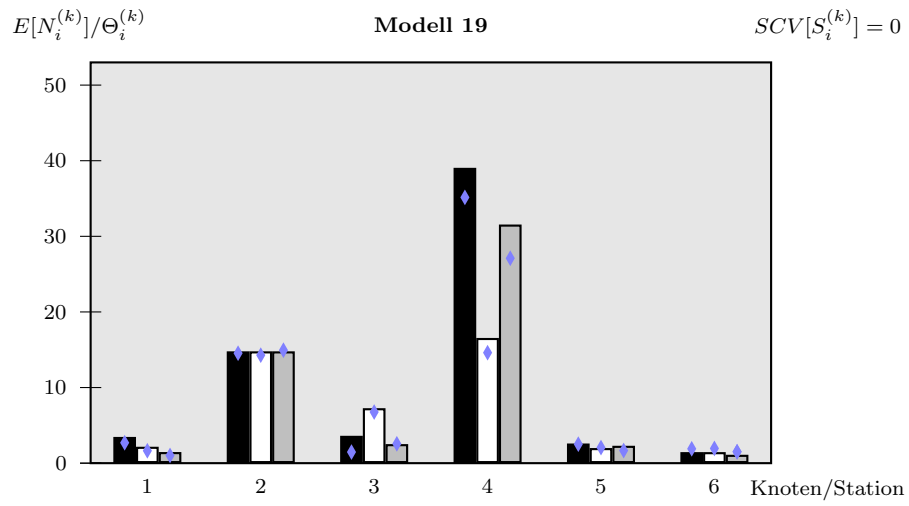
Simulationsmodelle 16-20 – Serie – 3 Produktklassen															
Modell	Knoten i	Diskrete ereignisorientierte Simulation						Approximation							
		Produktklasse						Produktklasse							
		1		2		3		$SCV[I_i^\Sigma]$	1		2		3		
		$\Theta_i^{(1)}$	90% KI	$\Theta_i^{(2)}$	90% KI	$\Theta_i^{(3)}$	90% KI		$E[N_i^1]$	$F_i^{(1)}$	$E[N_i^2]$	$F_i^{(2)}$	$E[N_i^3]$	$F_i^{(3)}$	
16	1	4.39	[4.33,4.46]	3.36	[3.3,3.42]	2.74	[2.68,2.8]	0.74	5.27	20	3.97	18.2	3.27	19.3	
	2	28.47	[27.3,29.65]	28.38	[27.22,29.53]	29.05	[27.87,30.23]	0.42	32.99	15.9	32.99	16.2	32.99	13.6	
	3	4.67	[4.57,4.77]	9.64	[9.52,9.76]	5.6	[5.5,5.71]	2.8	7.08	51.6	10.73	11.3	5.98	6.8	
	4	44.67	[43.79,45.54]	23.9	[23.23,24.57]	36.47	[35.68,37.26]	0.93	51.45	15.2	28.95	21.1	43.95	20.5	
	5	3.72	[3.67,3.77]	3.28	[3.23,3.33]	2.64	[2.59,2.69]	15.83	3.9	4.8	3.3	0.6	3.6	36.4	
	6	4.76	[4.63,4.88]	4.9	[4.78,5.02]	4.34	[4.22,4.45]	17.04	4.08	-14.3	4.08	-16.7	3.73	-14.1	
17	1	4.08	[4.02,4.13]	3.04	[2.99,3.09]	2.43	[2.38,2.47]	0.74	4.97	21.8	3.67	20.7	2.97	22.2	
	2	26.01	[25.06,26.97]	25.89	[24.95,26.82]	26.45	[25.52,27.38]	0.37	29.95	15.1	29.95	15.7	29.95	13.2	
	3	4.08	[4,4.16]	9.08	[8.99,9.18]	5	[4.92,5.09]	2.38	6.54	60.3	10.19	12.2	5.44	8.8	
	4	43.07	[42.24,43.9]	22.33	[21.74,22.92]	34.81	[34.12,35.51]	0.82	49.45	14.8	26.95	20.7	41.95	20.5	
	5	3.53	[3.49,3.57]	3.06	[3.02,3.1]	2.41	[2.37,2.45]	13.85	3.68	4.3	3.08	0.7	3.38	40.3	
	6	4.32	[4.23,4.42]	4.44	[4.35,4.54]	3.91	[3.82,4]	14.95	3.64	-15.7	3.64	-18	3.29	-15.9	
18	1	3.41	[3.38,3.44]	2.37	[2.34,2.4]	1.75	[1.72,1.77]	0.74	4.22	23.8	2.92	23.2	2.22	26.9	
	2	20.45	[20,20.9]	20.35	[19.89,20.81]	20.83	[20.38,21.29]	0.26	22.33	9.2	22.33	9.7	22.33	7.2	
	3	2.92	[2.88,2.96]	8.05	[8,8.1]	3.85	[3.8,3.89]	1.32	5.19	77.7	8.84	9.8	4.09	6.2	
	4	38.94	[38.53,39.35]	18.51	[18.26,18.76]	31.25	[30.91,31.6]	0.54	44.32	13.8	21.82	17.9	36.82	17.8	
	5	3.18	[3.15,3.21]	2.62	[2.59,2.65]	1.99	[1.97,2.02]	8.89	3.14	-1.3	2.54	-3.1	2.84	42.7	
	6	3.28	[3.23,3.33]	3.43	[3.38,3.48]	2.76	[2.71,2.81]	9.72	2.55	-22.3	2.55	-25.7	2.2	-20.3	
19	1	2.7	[2.69,2.71]	1.64	[1.63,1.65]	1.02	[1.01,1.02]	0.74	3.47	28.5	2.17	32.3	1.47	44.1	
	2	14.54	[14.49,14.59]	14.28	[14.23,14.33]	14.94	[14.86,15.03]	0.15	14.79	1.7	14.79	3.6	14.79	-1	
	3	1.47	[1.46,1.48]	6.76	[6.75,6.77]	2.56	[2.55,2.57]	0.27	3.62	146.3	7.27	7.5	2.52	-1.6	
	4	35.15	[35.15,35.15]	14.61	[14.59,14.63]	27.1	[27.05,27.14]	0.27	39.06	11.1	16.56	13.4	31.56	16.5	
	5	2.51	[2.51,2.52]	2.06	[2.05,2.07]	1.67	[1.66,1.68]	3.93	2.6	3.6	2	-2.9	2.3	37.7	
	6	1.9	[1.89,1.91]	1.95	[1.94,1.96]	1.51	[1.5,1.53]	4.48	1.46	-23.2	1.46	-25.1	1.11	-26.5	
20	1	3.34	[3.32,3.37]	2.29	[2.26,2.31]	1.67	[1.65,1.69]	0.74	4.15	24.3	2.85	24.5	2.15	28.7	
	2	21.34	[20.78,21.89]	21.14	[20.64,21.64]	21.78	[21.25,22.32]	0.25	22.7	6.4	22.7	7.4	22.7	4.2	
	3	2.9	[2.86,2.94]	7.87	[7.82,7.92]	3.73	[3.69,3.77]	1.4	5.14	77.2	8.79	11.7	4.04	8.3	
	4	40.36	[39.87,40.85]	19.53	[19.18,19.89]	32.03	[31.54,32.51]	0.54	45.84	13.6	23.34	19.5	38.34	19.7	
	5	3.21	[3.18,3.24]	2.6	[2.57,2.63]	2.12	[2.09,2.15]	10.9	3.32	3.4	2.72	4.6	3.02	42.5	
	6	3.5	[3.44,3.57]	3.73	[3.67,3.79]	3.12	[3.06,3.18]	11.74	2.98	-14.9	2.98	-20.1	2.63	-15.7	

Tabelle 5.6: Ergebnisse - Simulationsmodelle 16-20: $\lambda_0^{(1)} = 1$, $\lambda_0^{(2)} = 1$, $\lambda_0^{(3)} = 1$, $SCV[I_0^{(1)}] = 1$, $SCV[I_0^{(2)}] = 1$, $SCV[I_0^{(3)}] = 1$, $b_0^{(1)} = 1$, $b_0^{(2)} = 1$, $b_0^{(3)} = 1$.

Die Vergleiche der Approximationen mit den Simulationenwerten der Modelle des Seriensystems der vierten Kategorie sind akzeptabel. Die berechneten Kennzahlen entsprechen den Tendenzen der Simulationenwerte. Die Stationen 2, 4 und 6 repräsentieren Mehrbedienersysteme, die keine Batchbediengrößenvariationen besitzen. Die Abweichungen der Approximationen von den Simulationenwerten für die genannten Stationen bewegen sich in einem erwartbaren Rahmen. Die Approximationen der Kennzahlen der sechsten Station unterschätzen die Simulationenwerte. Die Unterschätzung resultiert aus der Überlagerung der Effekte, dass ein Mehrbedienersystem angenommen wurde und dass Station 6 von einer Kaskadenbildung betroffen ist [Grö07]. Das Phänomen der Kaskadenbildung tritt außerdem für die Stationen 3 und 5 auf. Ein Indikator sind die Variationskoeffizienten $SCV[I_i^\Sigma]$, die insbesondere für die Stationen 5 und 6 sehr hoch sind. Die angenommenen unterschiedlichen Auslastungen für die Produktklassen der Stationen führen zusätzlich zu einer Verschlechterung der Approximationsgüte. Das lässt sich für die Stationen 3 und 5 beobachten. Das Modell, für das die Variationskoeffizienten der Bedienzeiten mit $SCV[S_i^{(k)}] = 1.2$ angenommen wurden, besitzt die größten Übereinstimmungen und die niedrigste Approximationsgüte besitzt das Modell mit deterministisch verteilten Bedienzeiten ($SCV[S_i^{(k)}] = 0$).







5.4.3 Netz

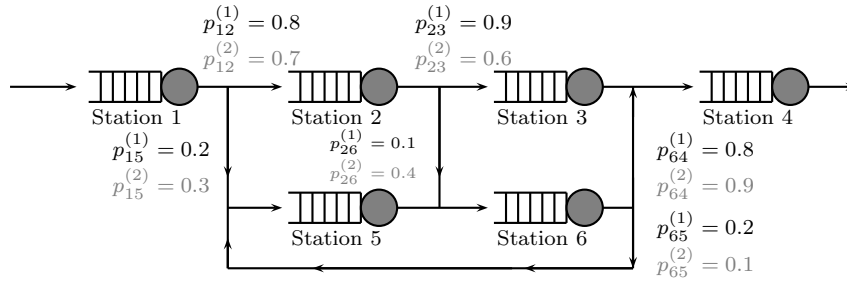


Abbildung 5.2: Referenzmodell 2

Netz – 2 Produktklassen – Modelle 1-20									
Modelle	Knoten i	c_i	ρ_i^Σ	Produktklasse					
				1			2		
				b_i^1	μ_i^1	ρ_i^1	b_i^2	μ_i^2	ρ_i^2
1-5	1	1	0.8	2	1.67	0.3	2	1	0.5
	2	3	0.9	4	0.15	0.45	4	0.13	0.45
	3	1	0.6	5	0.72	0.2	5	0.21	0.4
	4	5	0.8	10	0.07	0.3	10	0.04	0.5
	5	1	0.5	6	0.11	0.4	6	0.607	0.1
	6	2	0.9	8	0.04	0.5	8	0.101	0.4
6-10	1	1	0.8	5	0.67	0.3	5	0.4	0.5
	2	3	0.9	3	0.2	0.45	3	0.173	0.45
	3	1	0.6	4	0.9	0.2	4	0.263	0.4
	4	5	0.8	1	0.67	0.3	1	0.4	0.5
	5	1	0.5	3	0.23	0.4	3	1.215	0.1
	6	2	0.9	10	0.04	0.5	10	0.081	0.4
11-15	1	1	0.8	2	1.67	0.3	4	0.5	0.5
	2	3	0.9	4	0.15	0.45	5	0.104	0.45
	3	1	0.6	5	0.72	0.2	7	0.15	0.4
	4	5	0.8	10	0.07	0.3	13	0.031	0.5
	5	1	0.5	6	0.11	0.4	7	0.521	0.1
	6	2	0.9	8	0.04	0.5	9	0.09	0.4
16-20	1	1	0.8	1	3.33	0.3	3	0.667	0.5
	2	3	0.9	10	0.06	0.45	10	0.052	0.45
	3	1	0.6	3	1.2	0.2	7	0.15	0.4
	4	5	0.8	1	0.67	0.3	1	0.4	0.5
	5	1	0.5	15	0.05	0.4	15	0.243	0.1
	6	2	0.9	3	0.12	0.5	1	0.806	0.4

Tabelle 5.7: Netz – 2 Produktklassen – Simulationsmodelle 1-20

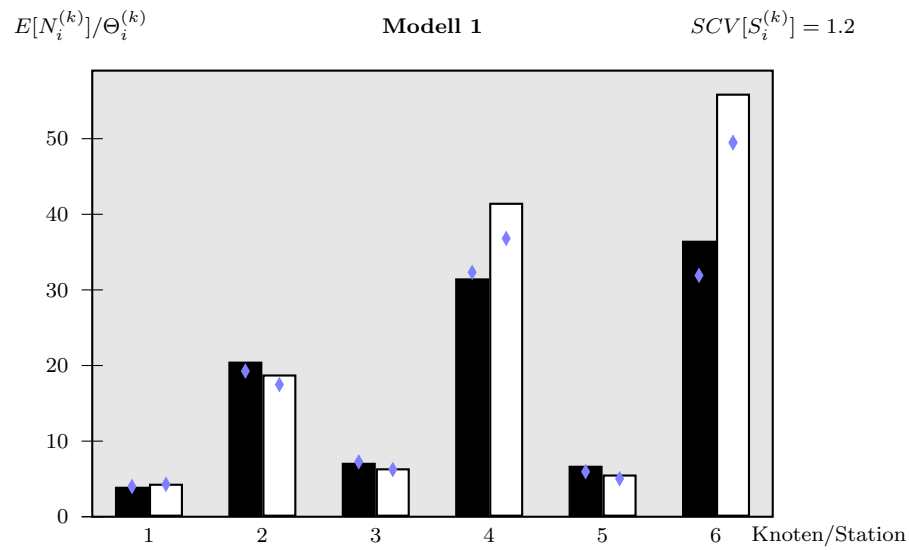
quadrierte Variationskoeffizienten der Bedienzeiten			
Modell	Knoten i	$SCV[S_i^1]$	$SCV[S_i^2]$
5	1	0.559	0.42
	2	0.577	1.128
	3	1.067	1.100
	4	0.826	1.08
	5	0.977	0.555
	6	0.251	0.686
10	1	0.183	0.305
	2	1.173	1.111
	3	0.685	0.628
	4	0.535	0.258
	5	0.413	0.777
	6	0.416	1.126
15	1	1.075	0.296
	2	0.136	0.228
	3	0.416	0.631
	4	0.41	0.602
	5	0.405	0.518
	6	0.4	1.166
20	1	0.979	0.89
	2	0.831	0.298
	3	0.71	0.894
	4	1.074	0.467
	5	0.925	0.192
	6	0.417	0.348

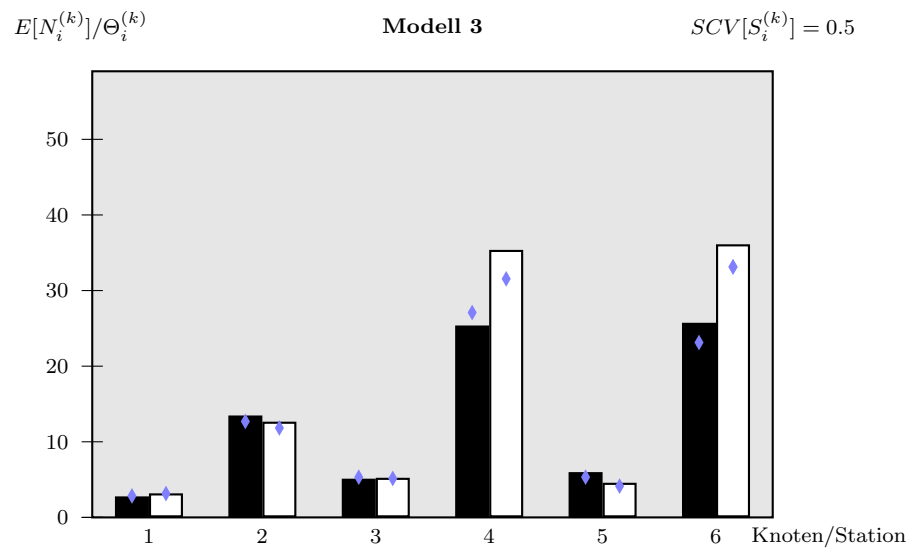
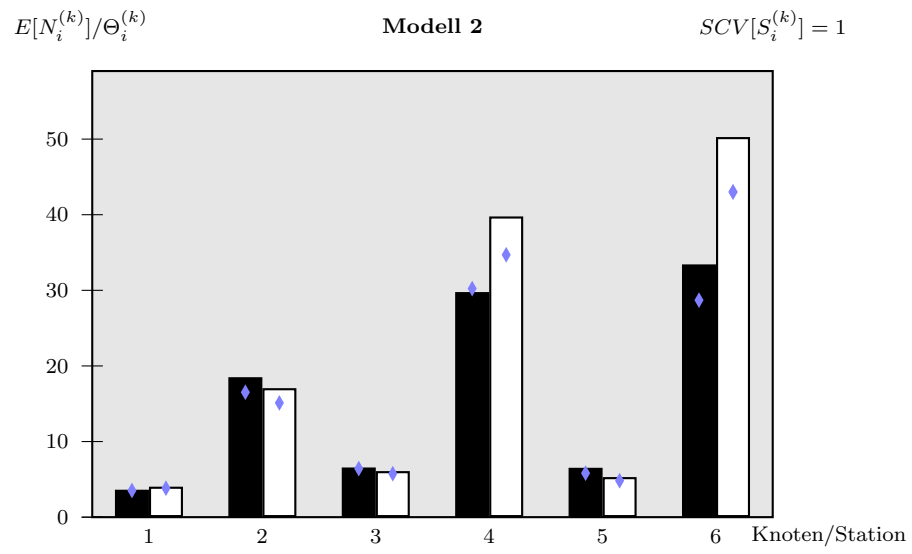
Tabelle 5.8: quadrierte Variationskoeffizienten der Bedienzeiten

Simulationsmodelle 1-5 – Netz – 2 Produktklassen										
Modell	Knoten i	Diskrete ereignisorientierte Simulation				Approximation				
		Produktklasse				Produktklasse				
		1		2		$SCV[I_i^\Sigma]$	1		2	
		$\Theta_i^{(1)}$	90% KI	$\Theta_i^{(2)}$	90% KI		$E[N_i^1]$	$F_i^{(1)}$	$E[N_i^2]$	$F_i^{(2)}$
1	1	4	[3.93,4.08]	4.29	[4.21,4.37]	0.5	3.97	-0.8	4.37	1.9
	2	19.27	[18.25,20.3]	17.48	[16.57,18.38]	0.54	20.52	6.5	18.82	7.7
	3	7.26	[7.1,7.43]	6.24	[6.13,6.36]	0.88	7.14	-1.7	6.41	2.7
	4	32.32	[31.64,33.01]	36.81	[36.03,37.59]	0.84	31.53	-2.4	41.53	12.8
	5	5.96	[5.83,6.08]	5.03	[4.91,5.14]	0.56	6.75	13.3	5.59	11.1
	6	31.92	[27.52,36.33]	49.49	[41.91,57.06]	0.72	36.51	14.4	55.96	13.1
2	1	3.53	[3.47,3.59]	3.83	[3.77,3.89]	0.5	3.63	2.8	4.03	5.2
	2	16.52	[15.75,17.29]	15.11	[14.44,15.77]	0.49	18.51	12.1	17.06	12.9
	3	6.42	[6.3,6.53]	5.75	[5.66,5.83]	0.77	6.57	2.3	6.08	5.7
	4	30.23	[29.7,30.76]	34.7	[34.11,35.29]	0.75	29.8	-1.4	39.8	14.7
	5	5.82	[5.71,5.93]	4.82	[4.73,4.92]	0.54	6.53	12.2	5.3	10
	6	28.7	[26.09,31.31]	43.01	[38.51,47.51]	0.68	33.45	16.6	50.31	17
3	1	2.84	[2.8,2.87]	3.15	[3.11,3.19]	0.5	2.78	-2.1	3.18	1
	2	12.69	[12.33,13.06]	11.83	[11.5,12.16]	0.36	13.48	6.2	12.66	7
	3	5.32	[5.26,5.38]	5.15	[5.1,5.2]	0.51	5.1	-4.1	5.22	1.4
	4	27.09	[26.8,27.38]	31.55	[31.2,31.91]	0.52	25.38	-6.3	35.38	12.1
	5	5.33	[5.26,5.4]	4.14	[4.09,4.19]	0.51	6	12.6	4.58	10.6
	6	23.13	[20.79,25.47]	33.13	[28.99,37.28]	0.56	25.76	11.4	36.16	9.2
4	1	2.01	[2,2.02]	2.33	[2.32,2.35]	0.5	1.94	-3.5	2.34	0.4
	2	8.69	[8.6,8.79]	8.31	[8.22,8.4]	0.24	8.45	-2.8	8.26	-0.6
	3	4.03	[4.02,4.04]	4.33	[4.32,4.35]	0.24	3.59	-10.9	4.34	0.2
	4	23.12	[23.06,23.18]	28.48	[28.41,28.55]	0.29	20.91	-9.6	30.91	8.5
	5	4.9	[4.87,4.94]	3.58	[3.55,3.6]	0.48	5.46	11.4	3.86	7.8
	6	16.55	[15.93,17.16]	21.2	[20.24,22.16]	0.45	18.06	9.1	21.98	3.7
5	1	2.75	[2.72,2.78]	3.07	[3.03,3.1]	0.5	2.71	-1.5	3.11	1.3
	2	15.43	[14.82,16.04]	14.13	[13.57,14.7]	0.35	16.3	5.6	15.13	7.1
	3	6.79	[6.66,6.93]	6	[5.9,6.1]	0.7	6.63	-2.4	6.12	2
	4	29.81	[29.23,30.4]	34.44	[33.78,35.11]	0.65	29.23	-2	39.23	13.9
	5	5.71	[5.6,5.81]	4.81	[4.72,4.9]	0.51	6.45	13	5.19	7.9
	6	21.25	[20,22.5]	29.74	[27.7,31.78]	0.65	25.05	17.9	34.85	17.2

Tabelle 5.9: Ergebnisse - Simulationsmodelle 1-5: $\lambda_0^{(1)} = 1$, $\lambda_0^{(2)} = 1$, $SCV[I_0^{(1)}] = 1$, $SCV[I_0^{(2)}] = 1$, $b_0^{(1)} = 1$, $b_0^{(2)} = 1$.

Alle Approximationen der Modelle des Netzes der ersten Kategorie besitzen große Übereinstimmungen zu den Simulationswerten. Erhöhte Abweichungen treten für die Stationen 2, 4 und 6 auf, die Mehrbedienersysteme darstellen. Es ist bekannt, dass die Genauigkeit der Approximation abnimmt, wenn die Bedieneranzahl steigt [Grö07]. Die zwischen den Produktklassen angenommenen variierenden Auslastungen an einer Station wirken sich kaum negativ auf die Approximationsergebnisse aus und die angenommene mittlere Gesamtauslastung für die fünfte Station ($\rho_5^\Sigma = 0.5$) senkt die Approximationsgüte nicht. Das Modell, das deterministisch verteilte Bedienzeiten beinhaltet ($SCV[S_i^{(k)}] = 0$), besitzt die höchsten Übereinstimmungen und die niedrigste Approximationsgüte besitzt das Modell mit exponentiell verteilten Bedienzeiten ($SCV[S_i^{(k)}] = 1$).

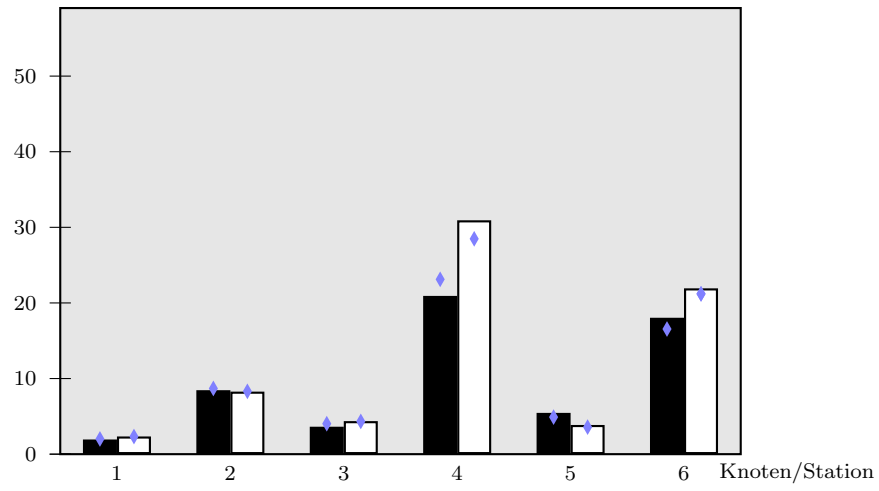




$$E[N_i^{(k)}]/\Theta_i^{(k)}$$

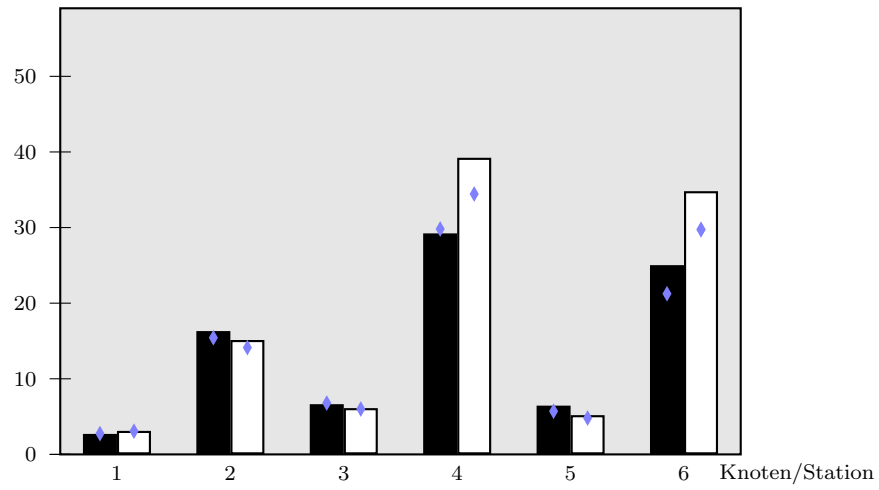
Modell 4

$$SCV[S_i^{(k)}] = 0$$



$$E[N_i^{(k)}]/\Theta_i^{(k)}$$

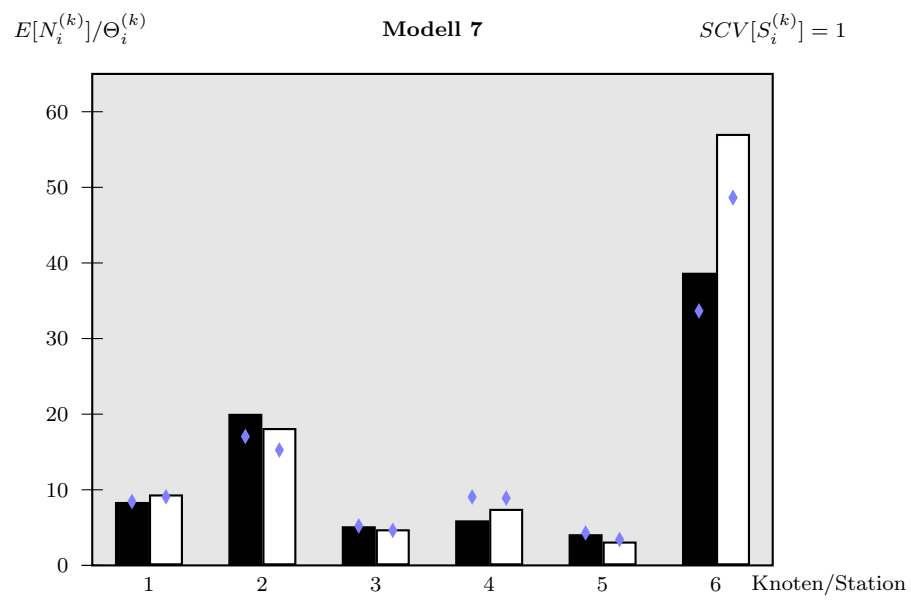
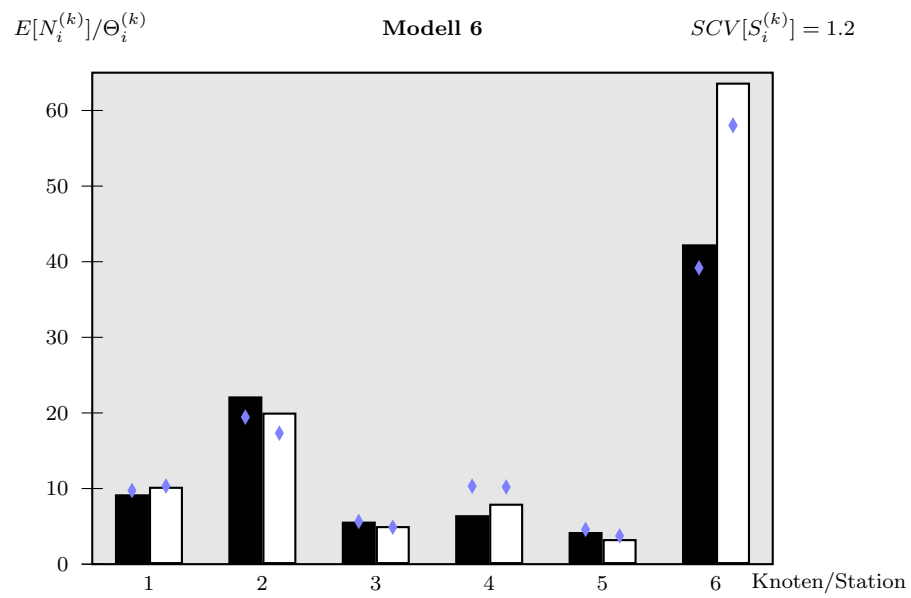
Modell 5

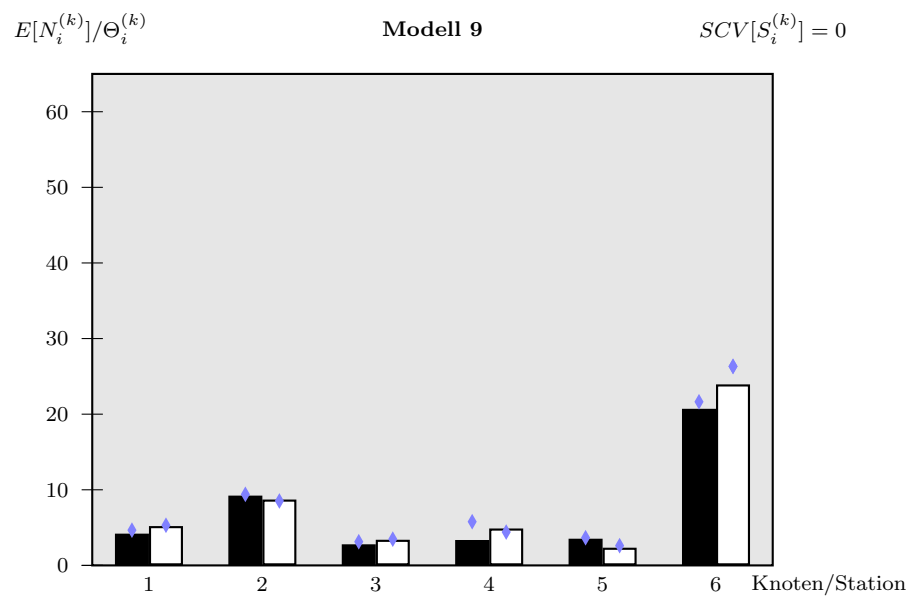
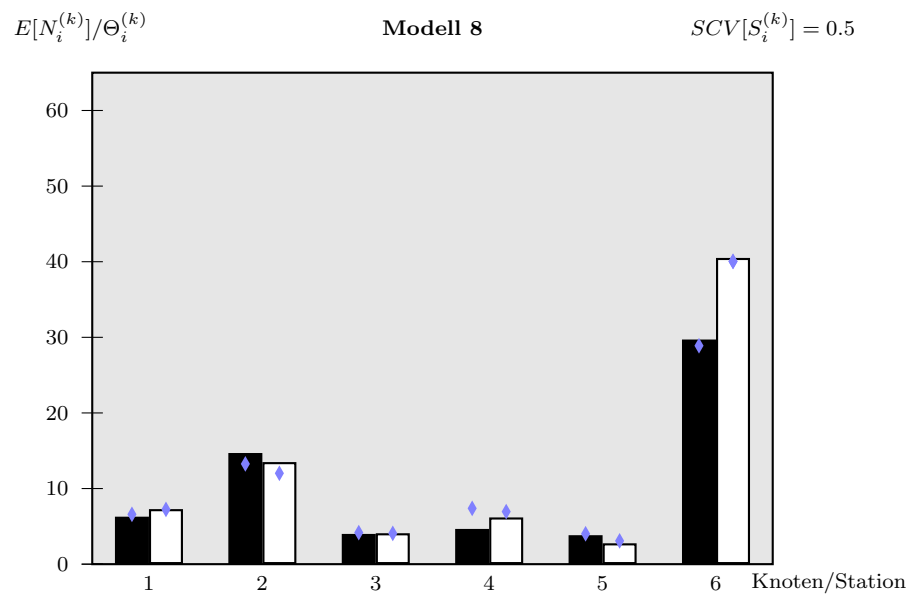


Simulationsmodelle 6-10 – Netz – 2 Produktklassen										
Modell	Knoten i	Diskrete ereignisorientierte Simulation				Approximation				
		Produktklasse				Produktklasse				
		1		2		$SCV[I_i^\Sigma]$	1		2	
		$\Theta_i^{(1)}$	90% KI	$\Theta_i^{(2)}$	90% KI		$E[N_i^1]$	$F_i^{(1)}$	$E[N_i^2]$	$F_i^{(2)}$
6	1	9.74	[9.47,10]	10.33	[10.05,10.6]	0.2	9.24	-5.1	10.24	-0.9
	2	19.45	[18.64,20.26]	17.33	[16.6,18.06]	1.74	22.19	14.1	20.05	15.7
	3	5.65	[5.54,5.76]	4.89	[4.81,4.98]	0.89	5.63	-0.4	5.04	3.1
	4	10.31	[10.02,10.6]	10.21	[9.89,10.54]	8.47	6.48	-37.2	8	-21.7
	5	4.6	[4.47,4.72]	3.74	[3.64,3.85]	2.06	4.25	-7.6	3.32	-11.2
	6	39.19	[35.17,43.2]	58.04	[51.55,64.52]	0.48	42.3	7.9	63.69	9.7
7	1	8.45	[8.29,8.62]	9.08	[8.91,9.26]	0.2	8.39	-0.7	9.39	3.4
	2	17.05	[16.38,17.72]	15.26	[14.66,15.85]	1.57	20.05	17.6	18.17	19.1
	3	5.22	[5.13,5.31]	4.63	[4.57,4.7]	0.79	5.18	-0.8	4.78	3.2
	4	9.05	[8.83,9.27]	8.9	[8.65,9.16]	7.65	5.96	-34.1	7.48	-16
	5	4.29	[4.19,4.4]	3.42	[3.33,3.5]	1.99	4.13	-3.7	3.16	-7.6
	6	33.66	[30.26,37.06]	48.64	[42.9,54.39]	0.45	38.71	15	57.07	17.3
8	1	6.59	[6.51,6.68]	7.24	[7.15,7.33]	0.2	6.28	-4.7	7.28	0.6
	2	13.26	[12.81,13.7]	12.02	[11.62,12.42]	1.14	14.7	10.9	13.5	12.3
	3	4.17	[4.13,4.22]	4.07	[4.03,4.1]	0.52	4	-4.1	4.09	0.5
	4	7.38	[7.27,7.49]	6.95	[6.81,7.09]	5.61	4.66	-36.9	6.18	-11.1
	5	4.02	[3.94,4.09]	3.08	[3.02,3.14]	1.83	3.83	-4.7	2.76	-10.4
	6	28.89	[26.82,30.96]	40.4	[36.44,44.36]	0.38	29.71	2.8	40.5	0.3
9	1	4.66	[4.64,4.67]	5.31	[5.3,5.33]	0.2	4.2	-9.9	5.2	-2.1
	2	9.4	[9.18,9.62]	8.52	[8.31,8.73]	0.71	9.23	-1.8	8.71	2.2
	3	3.13	[3.12,3.14]	3.47	[3.46,3.49]	0.26	2.79	-10.9	3.39	-2.3
	4	5.78	[5.75,5.82]	4.41	[4.36,4.46]	3.56	3.36	-41.9	4.88	10.7
	5	3.66	[3.61,3.72]	2.61	[2.57,2.64]	1.67	3.53	-3.6	2.34	-10.4
	6	21.64	[20.65,22.62]	26.32	[24.84,27.8]	0.31	20.71	-4.3	23.94	-9
10	1	5.69	[5.64,5.74]	6.3	[6.25,6.36]	0.2	5.32	-6.5	6.32	0.3
	2	16.99	[16.12,17.86]	15.11	[14.36,15.86]	0.95	17.37	2.2	15.83	4.8
	3	4.68	[4.62,4.75]	4.32	[4.27,4.37]	0.82	4.65	-0.6	4.47	3.5
	4	8.15	[8.01,8.29]	7.96	[7.79,8.13]	6.48	4.94	-39.4	6.46	-18.8
	5	3.99	[3.91,4.07]	3	[2.94,3.06]	1.77	3.78	-5.3	2.68	-10.7
	6	32.59	[28.42,36.76]	46.77	[39.43,54.11]	0.39	31.39	-3.7	43.6	-6.8

Tabelle 5.10: Ergebnisse - Simulationsmodelle 6-10: $\lambda_0^{(1)} = 1$, $\lambda_0^{(2)} = 1$, $SCV[I_0^{(1)}] = 1$, $SCV[I_0^{(2)}] = 1$, $b_0^{(1)} = 1$, $b_0^{(2)} = 1$.

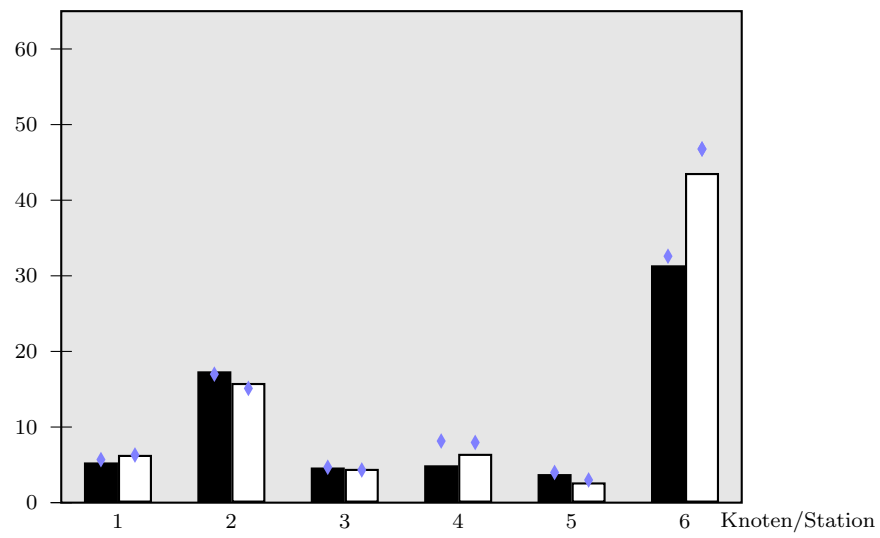
Zusammengefasst besitzen alle Modelle des Netzes der zweiten Kategorie akzeptable Übereinstimmungen zwischen Simulationen und Approximationsergebnissen. Die angenommenen unterschiedlichen Auslastungen der Produktklassen für eine Station i hat kaum einen negativen Einfluss auf die Approximationsgüten. Es lassen sich zwei Phänomene beobachten, die höhere Abweichungen verursachen. Die Approximationsgüte fällt für Stationen, die Mehrbedienersysteme repräsentieren, geringer aus. Das lässt sich für alle Modelle für die Stationen 2, 4 und 6 beobachten. Außerdem treten Abweichungen auf, wenn es an einer Station zu einer Kaskadenbildung kommt [HZ11]. Kaskaden entstehen an Stationen, an denen die mittlere Eingangsgruppengröße die Losgröße des Bedieners übersteigt. Diese Situation ist für die Stationen 2, 4 und 5 gegeben. Ein Indikator für eine Kaskadenbildung sind vergleichsweise hohe Variationskoeffizienten der Zwischenankunftszeiten ($SCV[I_i^\Sigma] > 1.25$). Insbesondere die vierte Station ist von hohen Abweichungen und einem hohen $SCV[I_4^\Sigma]$ betroffen. Diese Station besitzt eine größere Anzahl Bediener ($c_4 = 5$) und eine große Differenz zwischen der mittleren Eingangsgruppengröße ($E[X_4^{(1)}] = 4.81$, $E[X_4^{(2)}] = 6.14$) und der Batchbediengröße ($b_4^{(k)} = 1$). Die Approximationen der zweiten Station besitzen vergleichsweise hohe Übereinstimmungen zu den Simulationen, obwohl die Station ein Mehrbedienersystem ist. Jedoch ist die Kaskadenbildung ($E[X_2^{(k)}] = 5$, $b_2^{(k)} = 3$) geringer ausgeprägt. Die Entstehung von Kaskaden an der fünften Station, die ein Einbedienersystem repräsentiert, ist ähnlich wie an Station 2 ($E[X_5^{(1)}] = 5.75$, $E[X_5^{(2)}] = 5.49$, $b_5^{(k)} = 3$). Trotz der angenommenen mittleren Gesamtauslastung für die fünfte Station ($\rho_5^\Sigma = 0.5$), sind die Approximationen für einen Großteil der Konfigurationen näher an den Simulationen. Das Modell, für das die Variationskoeffizienten der Bedienzeiten mit $SCV[S_i^{(k)}] = 0.5$ angenommen wurden, besitzt die größten Übereinstimmungen und die niedrigste Approximationsgüte besitzt das Modell mit vergleichsweise hohen Variationskoeffizienten der Bedienzeiten, $SCV[S_i^{(k)}] = 1.2$.





$$E[N_i^{(k)}]/\Theta_i^{(k)}$$

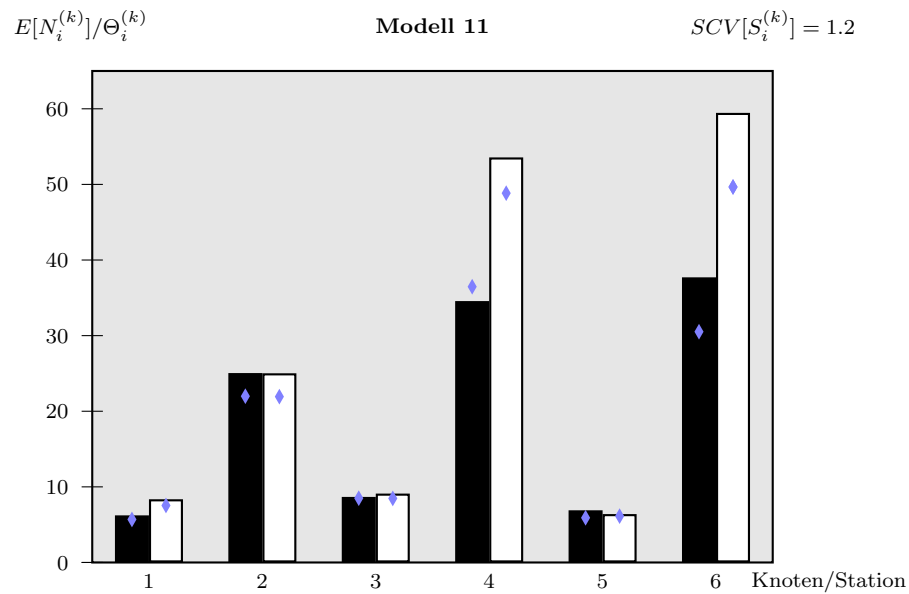
Modell 10



Simulationsmodelle 11-15 – Netz – 2 Produktklassen										
Modell	Knoten i	Diskrete ereignisorientierte Simulation				Approximation				
		Produktklasse				Produktklasse				
		1		2		$SCV[I_i^\Sigma]$	1		2	
		$\Theta_i^{(1)}$	90% KI	$\Theta_i^{(2)}$	90% KI		$E[N_i^1]$	$F_i^{(1)}$	$E[N_i^2]$	$F_i^{(2)}$
11	1	5.69	[5.55,5.83]	7.54	[7.4,7.69]	0.42	6.23	9.5	8.63	14.5
	2	21.99	[20.88,23.1]	21.93	[20.87,23]	0.88	25.5	16	25.02	14.1
	3	8.5	[8.27,8.73]	8.47	[8.31,8.62]	0.91	8.67	2.1	9.11	7.6
	4	36.47	[35.2,37.75]	48.84	[47.62,50.06]	0.88	34.57	-5.2	53.57	9.7
	5	5.91	[5.79,6.03]	6.13	[6.01,6.25]	0.72	6.9	16.8	6.4	4.4
	6	30.52	[27.35,33.69]	49.66	[43.87,55.45]	0.77	37.71	23.6	59.46	19.7
12	1	4.8	[4.7,4.89]	6.67	[6.56,6.77]	0.42	5.64	17.5	8.04	20.5
	2	18.48	[17.66,19.31]	18.92	[18.21,19.63]	0.8	22.98	24.4	22.82	20.6
	3	7.51	[7.35,7.67]	7.95	[7.83,8.06]	0.79	7.94	5.7	8.68	9.2
	4	32.2	[31.59,32.82]	44.12	[43.34,44.91]	0.79	32.48	0.9	51.48	16.7
	5	5.82	[5.72,5.93]	6	[5.9,6.11]	0.7	6.67	14.6	6.09	1.5
	6	27.64	[25.05,30.23]	43.65	[39.28,48.01]	0.72	34.49	24.8	53.54	22.7
13	1	3.68	[3.62,3.74]	5.56	[5.5,5.63]	0.42	4.16	13	6.56	18
	2	14.54	[14.1,14.98]	15.52	[15.1,15.94]	0.59	16.64	14.4	17.27	11.3
	3	6.11	[6.02,6.2]	7.15	[7.08,7.23]	0.52	6.05	-1	7.58	6
	4	28.35	[27.99,28.71]	40.55	[40.12,40.98]	0.55	27.15	-4.2	46.15	13.8
	5	5.42	[5.35,5.5]	5.34	[5.27,5.4]	0.64	6.11	12.7	5.33	-0.2
	6	21.48	[20.42,22.54]	32.16	[30.35,33.97]	0.6	26.43	23.1	38.69	20.3
14	1	2.27	[2.26,2.29]	4.2	[4.18,4.21]	0.42	2.69	18.5	5.09	21.2
	2	9.46	[9.33,9.58]	11.05	[10.93,11.16]	0.39	10.25	8.4	11.68	5.7
	3	4.39	[4.37,4.4]	6.22	[6.2,6.25]	0.24	4.08	-7.1	6.43	3.4
	4	23.55	[23.49,23.62]	37.02	[36.93,37.11]	0.31	21.72	-7.8	40.72	10
	5	4.95	[4.91,4.98]	4.7	[4.67,4.73]	0.58	5.54	11.9	4.57	-2.8
	6	16.52	[15.82,17.22]	23.21	[22.07,24.35]	0.48	18.34	11	23.8	2.5
15	1	3.39	[3.35,3.44]	5.29	[5.24,5.34]	0.42	3.91	15.3	6.31	19.3
	2	11.83	[11.57,12.09]	13.09	[12.85,13.33]	0.56	13.55	14.5	14.57	11.3
	3	6.09	[5.99,6.18]	7.13	[7.05,7.2]	0.35	5.95	-2.3	7.52	5.5
	4	28.9	[28.49,29.32]	41.08	[40.56,41.59]	0.57	27.72	-4.1	46.72	13.7
	5	5.24	[5.18,5.3]	5.16	[5.11,5.21]	0.63	6.01	14.7	5.2	0.8
	6	22.63	[21.44,23.82]	34.52	[32.46,36.58]	0.56	27.47	21.4	40.61	17.6

Tabelle 5.11: Ergebnisse - Simulationsmodelle 11-15: $\lambda_0^{(1)} = 1$, $\lambda_0^{(2)} = 1$, $SCV[I_0^{(1)}] = 1$, $SCV[I_0^{(2)}] = 1$, $b_0^{(1)} = 1$, $b_0^{(2)} = 1$.

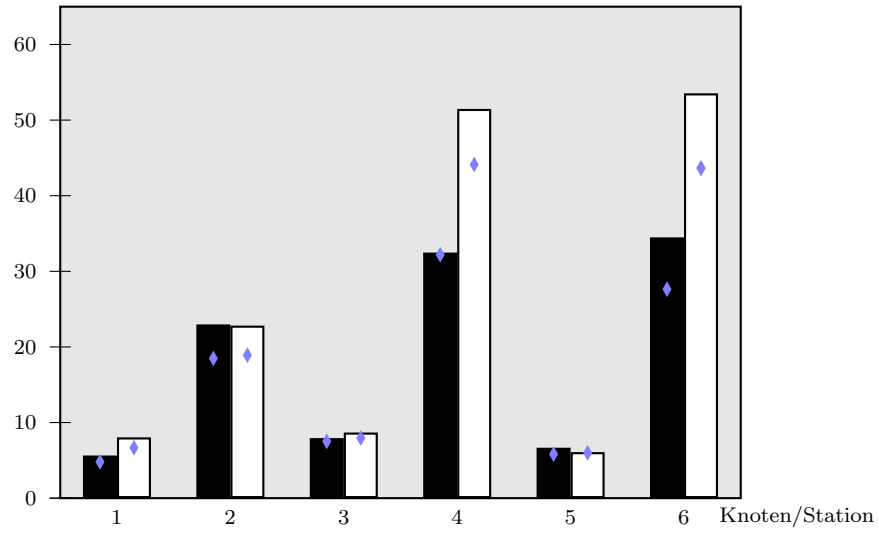
Die Approximationsergebnisse der Modelle des Netzes der dritten Kategorie besitzen gute Übereinstimmungen zu den Simulationswerten. Variierende Auslastungen und Batchbediengrößen zwischen den Produktklassen an einer Station führen allgemein zu höheren Abweichungen der Approximationen im Vergleich zu Modellen der ersten Kategorie. Die angenommene mittlere Gesamtauslastung für die fünfte Station ($\rho_5^\Sigma = 0.5$) beeinflusst die Approximationsergebnisse dagegen nicht nachhaltig. Die Minderung der Approximationsgüte für die Stationen 2, 4 und 6 lässt sich auf die angenommenen Mehrbedienersysteme zurückführen. Die größten Übereinstimmungen zwischen berechneten Kennzahlen und Simulationswerten besitzt das Modell mit deterministischen Bedienzeiten ($SCV[S_i^{(k)}] = 0$) und die niedrigste Approximationsgüte hat das Modell mit exponentiell verteilten Bedienzeiten ($SCV[S_i^{(k)}] = 1$).



$$E[N_i^{(k)}]/\Theta_i^{(k)}$$

Modell 12

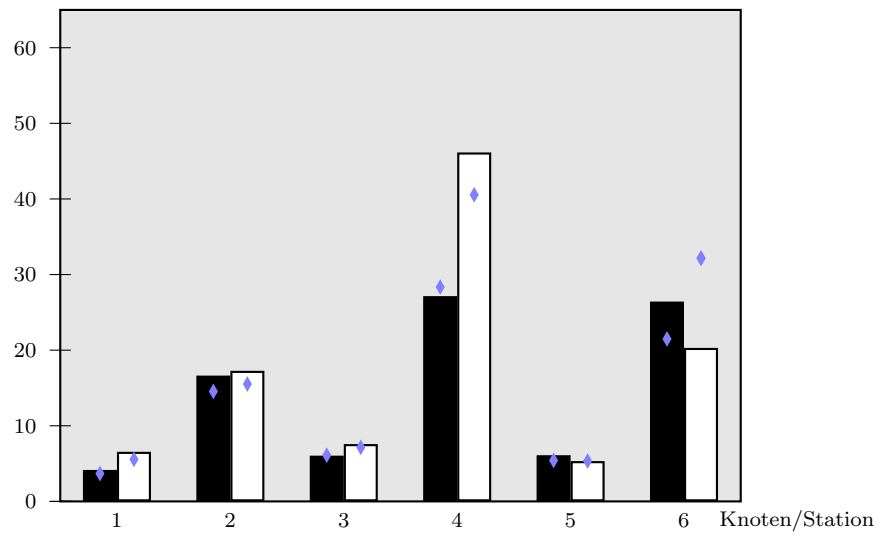
$$SCV[S_i^{(k)}] = 1$$



$$E[N_i^{(k)}]/\Theta_i^{(k)}$$

Modell 13

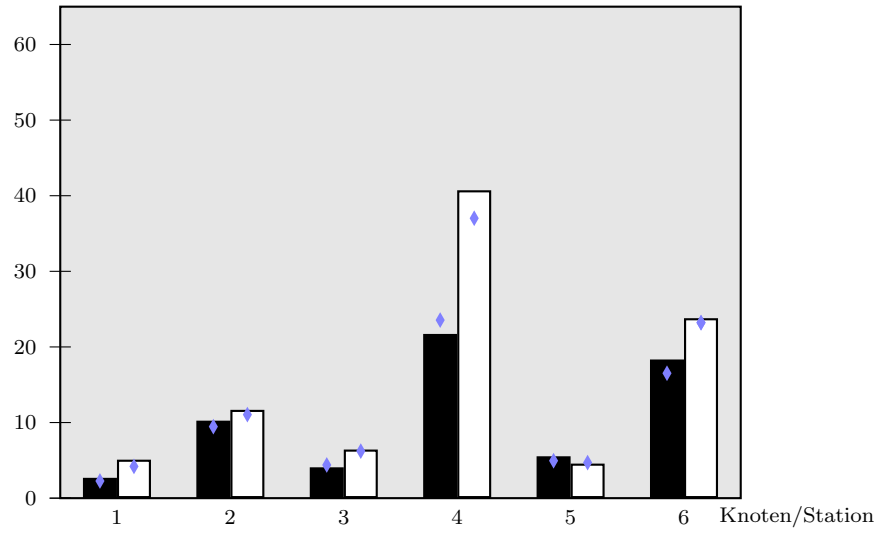
$$SCV[S_i^{(k)}] = 0.5$$



$$E[N_i^{(k)}]/\Theta_i^{(k)}$$

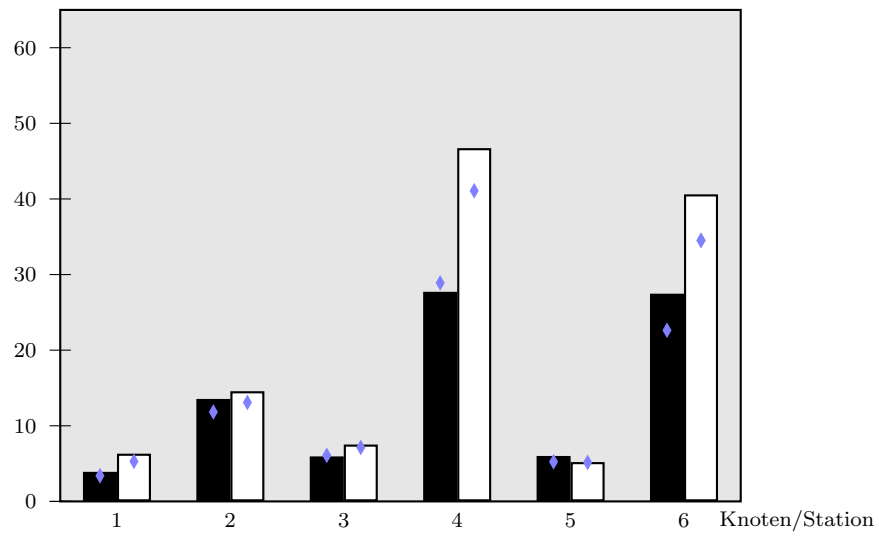
Modell 14

$$SCV[S_i^{(k)}] = 0$$



$$E[N_i^{(k)}]/\Theta_i^{(k)}$$

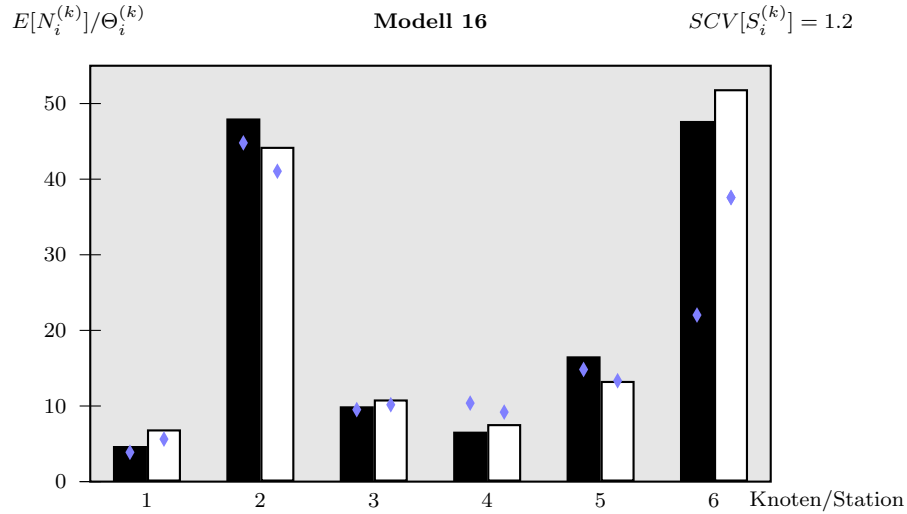
Modell 15



Simulationsmodelle 16-20 – Netz – 2 Produktklassen										
Modell	Knoten i	Diskrete ereignisorientierte Simulation				Approximation				
		Produktklasse				Produktklasse				
		1		2		$SCV[I_i^{\Sigma}]$	1		2	
		$\Theta_i^{(1)}$	90% KI	$\Theta_i^{(2)}$	90% KI		$E[N_i^1]$	$F_i^{(1)}$	$E[N_i^2]$	$F_i^{(2)}$
16	1	3.88	[3.77,3.98]	5.62	[5.51,5.72]	0.83	4.71	21.4	6.91	23
	2	44.8	[41.75,47.84]	41.05	[38.38,43.71]	0.36	48.03	7.2	44.28	7.9
	3	9.52	[9.18,9.86]	10.17	[9.92,10.42]	3.22	9.96	4.6	10.87	6.9
	4	10.38	[10.13,10.64]	9.19	[8.92,9.46]	8.96	6.61	-36.3	7.61	-17.2
	5	14.83	[14.51,15.16]	13.34	[12.99,13.69]	0.18	16.57	11.7	13.32	-0.2
	6	22.03	[19.86,24.2]	37.57	[33.87,41.26]	11.58	32.54	47.7	51.9	38.1
17	1	3.42	[3.34,3.51]	5.17	[5.08,5.26]	0.83	4.29	25.4	6.49	25.5
	2	40.32	[38,42.64]	37.14	[35.01,39.27]	0.32	43.41	7.7	40.23	8.3
	3	8.98	[8.71,9.26]	10.01	[9.8,10.22]	2.8	9.06	0.9	10.34	3.3
	4	9.61	[9.41,9.81]	8.23	[8.03,8.43]	8.14	6.08	-36.7	7.08	-14
	5	14.21	[13.99,14.43]	12.52	[12.27,12.78]	0.18	16.05	13	12.62	0.8
	6	19.03	[17.34,20.72]	32.12	[29.21,35.03]	10.77	30.36	59.5	47.89	49.1
18	1	2.44	[2.39,2.49]	4.21	[4.15,4.27]	0.83	3.24	32.8	5.44	29.2
	2	29.65	[28.86,30.43]	27.92	[27.2,28.64]	0.24	31.85	7.4	30.12	7.9
	3	6.62	[6.47,6.77]	8.62	[8.49,8.74]	1.73	6.8	2.7	9.03	4.5
	4	7.83	[7.72,7.94]	6.52	[6.4,6.64]	6.07	4.77	-39.1	5.77	-11.5
	5	13.54	[13.43,13.66]	11.29	[11.18,11.41]	0.16	14.78	9.2	10.9	-3.5
	6	14.73	[13.7,15.77]	24.72	[23.1,26.35]	8.74	24.92	69.2	37.87	53.2
19	1	1.4	[1.39,1.41]	3.19	[3.18,3.21]	0.83	2.19	56.4	4.39	37.6
	2	20.69	[20.68,20.70]	20	[19.83,20.17]	0.17	20.4	-1.4	20.1	0.5
	3	4.5	[4.47,4.53]	7.12	[7.08,7.17]	0.66	4.43	-1.6	7.64	7.3
	4	5.83	[5.79,5.86]	4.39	[4.35,4.43]	4.01	3.46	-40.7	4.46	1.6
	5	12.98	[12.92,13.03]	10.22	[10.18,10.27]	0.14	13.58	4.6	9.28	-9.2
	6	12.62	[12,13.23]	20.42	[19.38,21.46]	6.71	19.46	54.2	27.81	36.2
20	1	3.09	[3.02,3.15]	4.84	[4.77,4.91]	0.83	4.08	32	6.28	29.8
	2	30.32	[29.39,31.25]	28.28	[27.52,29.04]	0.31	34.14	12.6	32.13	13.6
	3	7.25	[7.08,7.41]	8.78	[8.64,8.91]	1.84	7.89	8.8	9.66	10
	4	8.1	[7.98,8.21]	7.03	[6.9,7.15]	6.43	5.03	-37.9	6.03	-14.2
	5	14.12	[13.91,14.34]	12.35	[12.13,12.57]	0.17	15.77	11.7	12.23	-1
	6	17.2	[16.07,18.32]	28.8	[26.93,30.66]	9.69	26.1	51.7	40.04	39

Tabelle 5.12: Ergebnisse - Simulationsmodelle 16-20: $\lambda_0^{(1)} = 1$, $\lambda_0^{(2)} = 1$, $SCV[I_0^{(1)}] = 1$, $SCV[I_0^{(2)}] = 1$, $b_0^{(1)} = 1$, $b_0^{(2)} = 1$.

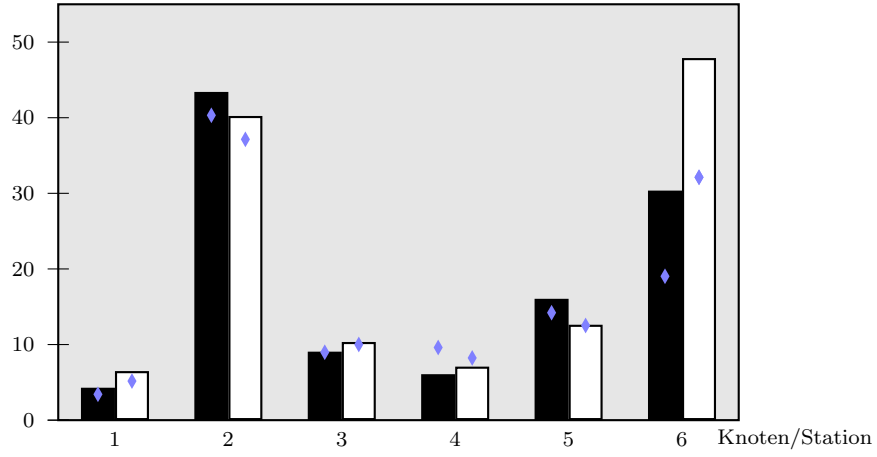
Die Übereinstimmungen zwischen Approximationen und Simulationen der Modelle des Netzes der vierten Kategorie sind größtenteils akzeptabel. Die berechneten Kennzahlen entsprechen den Tendenzen der Simulationen. Die Stationen 2, 4 und 6 repräsentieren Mehrbedienersysteme, die einen negativen Effekt auf die Approximationsgüte haben können. Die Stationen 2 und 4 besitzen keine Batchbedienvariationen. Die Abweichungen der Approximationen von den Simulationen sind für die zweite Station vergleichsweise sehr niedrig. Für die vierte Station trifft dies nicht zu, da diese, wie auch die Stationen 3 und 6, von Kaskaden betroffen ist. Die Kaskadenentstehung an den genannten Stationen führt zu deutlichen Abweichungen. Ein Indikator sind die Variationskoeffizienten $SCV[I_i^\Sigma]$, die insbesondere für die Stationen 4 und 6 sehr hoch sind. Die angenommenen unterschiedlichen Auslastungen für die Produktklassen an einer Station mindern die Approximationsgüte zusätzlich. Dies lässt sich für die Stationen 4, 5 und 6 beobachten. Jedoch sind die Abweichungen für die fünfte Station nicht sehr hoch trotz der mittleren Gesamtauslastung ($\rho_5^\Sigma = 0.5$). Das Modell, für das die Variationskoeffizienten der Bedienzeiten mit $SCV[S_i^{(k)}] = 1.2$ angenommen wurden, besitzt die größten Übereinstimmungen und die niedrigste Approximationsgüte besitzt das Modell mit den Variationskoeffizienten $SCV[S_i^{(k)}] = 0.5$ der Bedienzeiten.



$$E[N_i^{(k)}]/\Theta_i^{(k)}$$

Modell 17

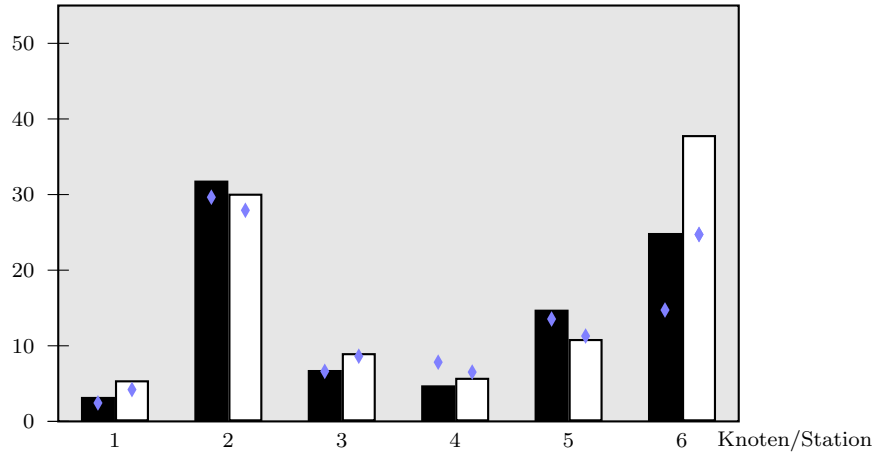
$$SCV[S_i^{(k)}] = 1$$



$$E[N_i^{(k)}]/\Theta_i^{(k)}$$

Modell 18

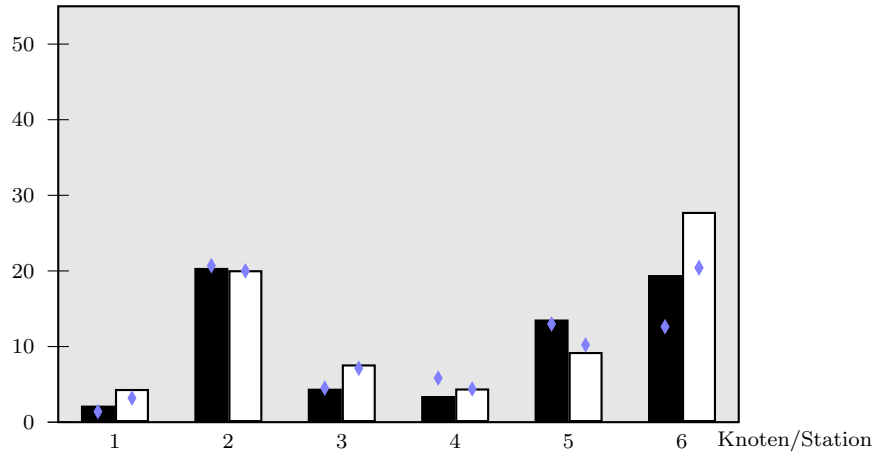
$$SCV[S_i^{(k)}] = 0.5$$



$$E[N_i^{(k)}]/\Theta_i^{(k)}$$

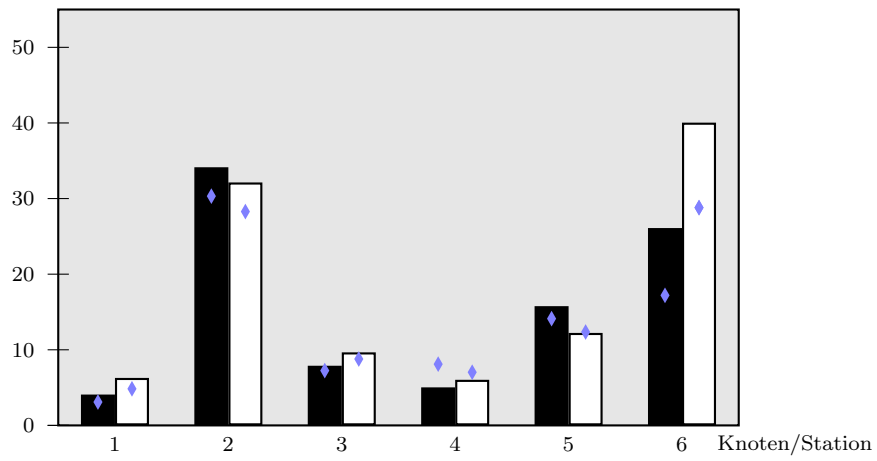
Modell 19

$$SCV[S_i^{(k)}] = 0$$



$$E[N_i^{(k)}]/\Theta_i^{(k)}$$

Modell 20



6 Fazit

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, die Dekompositionsmethode für offene Warteschlangennetze mit Batch Processing auf den Mehr-Produktfall zu erweitern und die weiterentwickelten Approximationen mit Hilfe diskreter ereignisorientierten Simulation zu validieren. Es wurde eine Simulationsstudie, die zwei unterschiedliche Referenzmodelle beinhaltet, vorgestellt und analysiert. Die Simulationen wurden mit der Simulationssoftware Arena durchgeführt und die statistischen Aufzeichnungen mit der Methode der regenerativen stochastischen Prozesse ausgewertet.

Die Vergleiche zwischen Simulations- und Approximationsergebnissen zeigten, dass die Qualität der Weiterentwicklung der Dekomposition hoch ist, wenn alle mathematischen Voraussetzungen zur Anwendung der weiterentwickelten Dekomposition gegeben sind und keine Batchbediengrößenvariation für die Stationen angenommen wird (Kategorie 1). Die Verletzung einer oder mehrerer Voraussetzungen oder die Annahme von Batchbediengrößenvariationen führt fast immer zu Abweichungen der Approximationen von den Referenzwerten.

Die Dekompositionsmethode und die Formel von Allen und Cunneen beruhen auf der “heavy traffic” Approximation und setzen außerdem voraus, dass die Ankunfts- und Bedienprozesse Erneuerungsprozesse darstellen. Zudem müssen das erste und zweite Moment der Verteilungen der Zwischenankunfts- und Bedienzeiten existieren und endlich sein.

Die Verletzung der “heavy traffic” Voraussetzung durch die Annahme einer mittleren oder niedrigen Gesamtauslastung eines Warteschlangensystems kann zu einer Verschlechterung der Approximationen führen. Diese und frühere Arbeiten zeigten, dass die Dekomposition beziehungsweise die Formel von Allen und Cunneen sich sehr robust verhalten bezogen auf eine angenommene mittlere Auslastung.

Die Approximationsgüte einzelner Knoten hängt zusätzlich von der Netzstruktur des zu untersuchenden Warteschlangennetzes ab. Da die Überlagerung von Erneuerungsprozessen in der Regel keinen Erneuerungsprozess erzeugt und die Aufspaltung eines Erneuerungsprozesses zwar wieder Erneuerungsprozesse ergibt, die aber voneinander abhängig sind, führt eine komplexe Netzstruktur zu Abweichungen insbesondere für Knoten, deren Eingangsströme aus der Überlagerung aufgespaltener Ströme bestehen.

Die Approximation der Warteschlangenlänge beziehungsweise der Anzahl Aufträge in einem Warteschlangensystem durch die Formel von Allen und

Cunneen nutzt das erste und zweite Moment der Verteilungen der Zwischenankunfts- und Bedienzeiten. Durch die Reduzierung der Informationen auf das erste und zweite Moment sind Fehler möglich. Eine Verbesserung der Formel, zum Beispiel durch die Integration weiterer Momente der Verteilungen in die Formel, erscheint zumindest für die Fälle $SCV[I], SCV[S] < 0.25$ beziehungsweise $SCV[I], SCV[S] > 1.25$ möglich.

Aus früheren Untersuchungen ist bekannt, dass die Approximation Abweichungen erzeugen kann, wenn die eingehenden quadrierten Variationskoeffizienten $SCV[\cdot]$ der Verteilungen der Zwischenankunfts- und Bedienzeiten außerhalb des Bereichs $0.25 < SCV[\cdot] < 1.25$ liegen. Wird für ein Warteschlangensystem Batch Service angenommen und liegt die Situation einer Kaskadenbildung vor, $b_i^{(k)} < E[X_i^{(k)}]$, ist es sehr wahrscheinlich, dass der Variationskoeffizient der Zwischenankunftszeiten außerhalb des angegebenen Bereichs liegt. Dies ist auf den Quotienten $E[X_i^{(k)}]/b_i^{(k)}$ des Terms

$$SCV[I_i^{(k)}] \approx \frac{E[X_i^{(k)}]}{b_i^{(k)}} (SCV[I_i^{(k)}] + SCV[X_i^{(k)}])$$

zurückzuführen, der sich verstärkend auf $(SCV[I_i^{(k)}] + SCV[X_i^{(k)}])$ auswirkt. Die Entstehung von Kaskaden bedeutet eine Verletzung der Voraussetzung, dass es sich beim Ankunftsprozess eines Warteschlangensystems um einen Erneuerungsprozess handeln muss. Daher ist der Einsatz der Approximationsformel von Allen und Cunneen für den Umgang mit Kaskaden nicht immer empfehlenswert und hängt von der Größe des Quotienten $E[X_i^{(k)}]/b_i^{(k)}$ ab. Aus [Grö07] ist außerdem bekannt, dass sich eine höhere Bedieneranzahl zusätzlich negativ auf die Approximationen auswirkt und vorhandene Abweichungen weiter verstärkt werden. Die Blockierwahrscheinlichkeit $C(c, \rho^\Sigma)$ wurde für Mehrbedienersysteme in dieser Arbeit mit der Erlang-C Formel approximiert. Auch hier sind Verbesserungen möglich.

Da eine gemeinsame Warteschlangenlänge der Produktklassen ermittelt wird, muss die Warteschlangenlänge anschließend auf die einzelnen Produktklassen umgerechnet werden. Die Umrechnung bildet die tatsächliche Anzahl Aufträge in der Warteschlange gut ab, wenn keine Batchbediengrößenvariation angenommen wurde. Wird diese angenommen, führt die Umrechnung zu weiteren Abweichungen.

Die Ströme zwischen den Warteschlangensystemen in einem offenen Netz werden durch die Dekompositionsmethode bestimmt. Die Zusammenfassung der in ein Warteschlangensystem eingehenden Ströme mehrerer Produktklassen zu einem aggregierten Strom, welcher nach der Bestimmung der Maße des Abgangsstroms wieder bezüglich der Produktklassen auseinander gerechnet

wird, ist eine Fehlerquelle der Methode. Jedoch zeigte die Simulationsstudie, dass die Methode trotz mehrerer angenommener Produktklassen gute Ergebnisse liefert. Insbesondere die Approximationen der Simulationsmodelle der ersten Kategorie haben große Übereinstimmungen zu den Referenzwerten der Simulation. Werden zusätzlich Batchbediengrößenvariationen (Kategorie 3) angenommen, sind die Ergebnisse noch gut.

Für die Bestimmung der Maße der Verteilung des Abgangsstroms wurde in dieser Arbeit der Ansatz von Pujolle und Ai verwendet. Eine Alternative stellt der Ansatz von Whitt dar:

$$SCV[D_j] \approx 1 + (1 - (\rho_j^\Sigma)^2)(SCV[I_j^\Sigma] - 1) + \frac{(\rho_j^\Sigma)^2}{\sqrt{c_j}}(SCV[S_j^\Sigma] - 1).$$

Im Vergleich zu Pujolle und Ai wird das Maß der Verteilung der Bedienzeiten $SCV[S_j^\Sigma]$ zusätzlich durch die Bedieneranzahl $\sqrt{c_j}$ gewichtet. Diese Gewichtung hat einen positiven Effekt auf offene Netze, die Mehrbedienersysteme umfassen. Einige Berechnungen zeigten, dass bei Nutzung der Approximation von Whitt innerhalb der Dekomposition die Abweichungen der Approximationen von den Referenzwerten abnehmen. Die Verbesserungen beziehen sich dabei nicht nur auf Mehrbedienersysteme. Nachgeschaltete Einbedienersysteme profitieren ebenfalls von der Verbesserung. Allerdings ist das Verbesserungspotential beschränkt. Die Approximationen besitzen trotz Reduktion der Abweichungen nicht zwangsläufig eine gute Qualität.

Die weiterentwickelte Dekompositionsmethode für offene Netze eignet sich, wenn die mathematischen Voraussetzungen erfüllt sind, hervorragend als Prä-Evaluierungswerkzeug, das eine Vorabbewertung von Modellen ermöglicht. Ungeeignete Konfigurationen können durch den Einsatz eines solchen Werkzeuges identifiziert und vor der Simulation verworfen werden. Produktionsanlagen, die sortenreinen Batch Service für unterschiedliche Produktklassen beinhalten, wobei die Losgrößen entlang des Materialflusses zunehmen, sind ein geeignetes Einsatzgebiet. Werden Losgrößenfluktuationen angenommen, hängt die Qualität der Approximation vom Verhältnis der mittleren Eingangsgruppengröße zur Batchbediengröße der jeweiligen Produktklasse ab.

7 Quellen

Literatur

- [AG07] S. Asmussen and Peter W. Glynn. *Stochastic Simulation: Algorithms and Analysis*. Stochastic modelling and applied probability. Springer, New York, 2007.
- [All78] Arnold O. Allen. *Probability, Statistics and Queueing Theory : With Computer Science Application*. Academic Press, Florida, 1. edition, 1978.
- [BGMT06] Gunter Bolch, Stefan Greiner, Hermann de Meer, and Kishor Shridharbhai Trivedi. *Queueing Networks and Markov Chains - Modeling and Performance Evaluation with Computer Science Applications*. Wiley, New York, 2. edition, 2006.
- [Bru71] Shelby L. Brumelle. Some Inequalities for Parallel-Server Queues. *Operations Research*, 19(2):402–413, 1971.
- [CHW75] K. M. Chandy, U. Herzog, and L. Woo. Approximate Analysis of General Queueing Networks. *IBM J. Res. Dev.* 19, 1:43–49, 1975.
- [CL81] Singha Chiamsiri and Michael S. Leonard. A Diffusion Approximation for Bulk Queues. *Management Science*, 27(10):1188–1199, 1981.
- [CY01] H. Chen and D.D. Yao. *Fundamentals of Queueing Networks: Performance, Asymptotics and Optimization*. Applications of mathematics : stochastic modelling and applied probability. Springer, 2001.
- [Fel54] William Feller. Diffusion Processes in One Dimension. *Transactions of the American Mathematical Society*, 77(1):1–31, 1954.
- [Fra03] Michael Frank. *Geschlossene Warteschlangennetze und Kanban-Systeme*. TU Clausthal, TU Clausthal, 2003. Dissertation.
- [Gau12] N. Gautam. *Analysis of Queues: Methods and Applications*. Operations Research Series. Taylor & Francis, 2012.
- [Gel75] Erol Gelenbe. On Approximate Computer System Models. *Journal of the ACM*, 22(2):261–269, April 1975.

- [Gel79] Erol Gelenbe. Probabilistic models of computer-systems - Part 2 Diffusion approximations, waiting times and batch arrivals. *ACTA INFORMATICA*, 12:285–303, 1979.
- [GH98] Donald Gross and Carl M. Harris. *Fundamentals of Queueing Theory*. John Wiley & Sons, Incorporated, New York, 3. edition, 1998.
- [GP98] Erol Gelenbe and Guy Pujolle. *Introduction to Queueing Networks*. Wiley, New York, 2. edition, 1998.
- [Grö07] Tobias Gröger. *Warteschlangensysteme mit Gruppenankünften, Gruppenbedienung und heterogenen Kunden*. TU Clausthal, TU Clausthal, 2007. Diplomarbeit.
- [Han06] Thomas Hanschke. Approximations for the mean queue length of the $GI^x/G^{(b,b)}/c$ queue. *Operations Research Letters*, 34(2):205–213, 2006.
- [Hey70] Daniel P. Heyman. A diffusion model approximation for the $G/G/1$ queue. *Bell System Technical Journal*, 54:1637–1646, 1970.
- [HS82] Daniel P. Heyman and Matthew J. Sobel. *Stochastic Models in Operations Research: Stochastic Processes and Operating Characteristics - Volume I*. McGraw-Hill, New York, 1982.
- [HW78] Baruch Halachmi and R. Franta W. A Diffusion Approximation to the Multi-Server Queue. *Management Science*, 24(5):522–529, 1978.
- [HZ11] Th. Hanschke and H. Zisgen. Queueing networks with batch service. *European Journal of Industrial Engineering*, 5(3):313–326, 2011.
- [Kin62a] J. F. C. Kingman. On Queues in Heavy Traffic. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 24(2):383–392, 1962.
- [Kin62b] J. F. C. Kingman. Some Inequalities for the Queue $GI/G/1$. *Biometrika*, 49(3-4):315–324, 1962.
- [Kin70] J. F. C. Kingman. Inequalities in the Theory of Queues. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 32(1):102–110, 1970.

- [KLB76] W. Krämer and Manfred Langenbach-Belz. Approximate Formulae for the Delay in the Queueing System GI/G/1. In *8th International Teletraffic Congress (ITC 8)*, pages 235/1–235/8, 1976.
- [Kle75] Leonard Kleinrock. *Queueing Systems, Volume 1: Theory*. Wiley, New York, 1. edition, 1975.
- [Kob74] Hisashi Kobayashi. Application of the Diffusion Approximation to Queueing Networks I: Equilibrium Queue Distributions. *Journal of the ACM*, 21(2):316–328, April 1974.
- [Köl74] Julian Köllerström. Heavy Traffic Theory for Queues with Several Servers I. *Journal of Applied Probability*, 11(3):544–552, 1974.
- [Kue79] Paul J. Kuehn. Approximate Analysis of General Queueing Networks by Decomposition. *Communications, IEEE Transactions on*, 27(1):113–126, 1979.
- [Lav83] Stephen S. Lavenberg. *Computer Performance Modeling Handbook*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA, 1983.
- [Lit61] John D. C. Little. A proof for the Queueing Formula: $L = \lambda W$. *Operations Research*, 9(3):383–387, 1961.
- [Mar72] J. Martin. *Systems Analysis for Data Transmission*. Prentice-Hall Series in Automatic Computation. Prentice-Hall, 1972.
- [Mar74] W. Marchal. *Simple Bounds and Approximations in Queueing System*. George Washington University, Washington D.C., 1974. Dissertation.
- [Mar78] William G. Marchal. Some Simpler Bounds on the Mean Queueing Time. *Operations Research*, 26(6):1083–1088, 1978.
- [Mit97] Ulrich Mitzlaff. *Diffusionsapproximation von Warteschlangensystemen*. TU Clausthal, TU Clausthal, 1997. Dissertation.
- [PA86] G. Pujolle and W. Ai. A Solution for Multiserver and Multiclass Open Queueing Networks. *Journal INFOR - Information Systems and Operational Research*, 24(3):221–230, 1986.
- [Sti72] Shaler Stidham. $L = \lambda W$: A Discounted Analogue and a New Proof. *Operations Research*, 20:1115–1126, 1972.

- [Whi83] Ward Whitt. The Queueing Network Analyzer. *Bell System Technical Journal*, 62(9):2779–2815, November 1983.
- [Zis99] Horst Zisgen. *Warteschlangennetzwerke mit Gruppenbedienung*. TU Clausthal, TU Clausthal, 1999. Dissertation.
- [Zis09] Horst Zisgen. A diffusion approximation for batch queues of type $GI^x/G^{(b,b)}/1$. *Performance Evaluation*, 66(9/10):557–563, 2009.